

# Fractais Randômicos na Simulação de Realismo de Paisagens

JOSÉ MARIA R. NEVES

Laboratório de Computação Gráfica / COPPE / UFRJ  
C.P. 68511  
21945-970 Rio de Janeiro RJ  
jmneves@lcg.ufrj.br

Departamento de Matemática / ICEB / UFOP  
Campus do Morro do Cruzeiro  
35400 Ouro Preto MG

**Abstract.** A method has been developed to help the simulation of realism of landscapes, by the generation of a random fractal over a known topography. Based on the fractional Brownian movement model, the process used is a variation of the random midpoint displacement method.

## 1. Introdução

Um dos modelos matemáticos mais usados em computação gráfica, para simulação da natureza através de fractais randômicos, tem sido o "movimento Browniano fracionário", descrito primeiramente por Mandelbrot e Van Ness em [Mandelbrot-Ness(1968)] e [Mandelbrot(1982)], e mais recentemente em [Peitgen-Saupe(1988)] além de outros textos.

Neste trabalho, apresentamos uma experiência de simulação de realismo de paisagens através da geração de um fractal randômico sobre uma superfície (relevo) conhecida. O processo utilizado constitui uma variante do "método de deslocamento aleatório do ponto médio", descrito nos trabalhos citados acima. As peculiaridades desta variante têm origem no fato de partir de um conjunto de dados (pontos) pertencentes à superfície em questão, sobre os quais se constrói uma malha triangular irregular. Essa irregularidade exige um tratamento particular para cada triângulo.

Nos textos citados, os processos de aproximação do movimento Browniano fracionário para obtenção de imagens realistas de paisagens, baseados no método de deslocamento aleatório do ponto médio, consideram dados de superfície organizados em malhas regulares, quadradas ou triangulares. Não é de nosso conhecimento nenhum outro trabalho que utilize malha triangular irregular.

## 2. Movimento Browniano fracionário

Um movimento Browniano fracionário é uma função de uma variável,  $V_H(t)$ , cujos incrementos  $V_H(t_2) - V_H(t_1)$  têm distribuição Gaussiana com média

zero e variância proporcional à distância, conforme a relação

$$\text{ou} \quad \text{variância} \propto \text{distância}^{2H} \quad 0 < H < 1$$

$$\text{var} [V_H(t_2) - V_H(t_1)] \propto |t_2 - t_1|^{2H} \quad (I)$$

Quando  $H$  é próximo de 1, temos um gráfico suave, enquanto que um valor de  $H$  próximo de 0 fornece um gráfico mais rugoso. O valor 1/2 para esse parâmetro fornece um movimento Browniano usual.

Na caracterização do movimento Browniano fracionário como fractal, o parâmetro  $H$  relaciona-se com a dimensão fractal pela expressão

$$D = 2 - H.$$

Apresentamos, na figura 1, algumas amostras de movimento Browniano fracionário com diferentes valores de  $H$  e  $D$ .

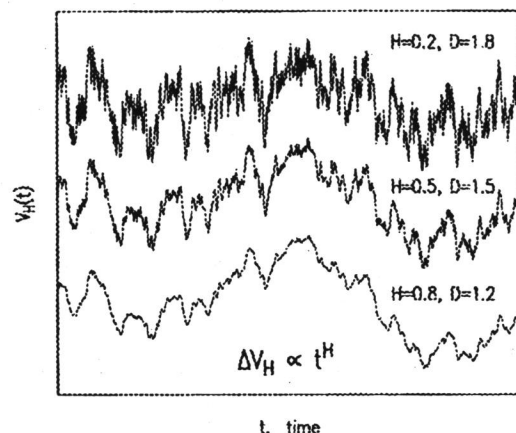


Figura 1: Amostras de movimento Browniano fracionário [Peitgen-Saupe(1988)]

Vamos, a seguir, descrever resumidamente um método para geração de uma aproximação de movimento Browniano fracionário em uma dimensão, denominado "deslocamento aleatório do ponto médio". Um tratamento mais detalhado pode ser encontrado em [Peitgen-Saupe(1988)].

### Geração de movimento Browniano fracionário

Consideremos  $\sigma^2$  a variância dos incrementos de  $V_H(t)$  para pontos cuja diferença  $\Delta t = 1$ . Sejam  $t_2$  e  $t_1$  dois pontos quaisquer já determinados nesse processo. Então, da relação (I), vem

$$\text{var}[V_H(t_2) - V_H(t_1)] = |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2$$

Vamos determinar um novo ponto  $t_3 = (t_2 + t_1)/2$ , tal que

$$V_H(t_3) = [V_H(t_1) + V_H(t_2)]/2 + d$$

onde  $d$  é uma variável aleatória Gaussiana com média zero e variância  $\Delta^2$ .

Subtraindo  $V_H(t_1)$  de ambos os lados dessa equação, temos

$$V_H(t_3) - V_H(t_1) = [V_H(t_2) - V_H(t_1)]/2 + d$$

Aplicando a propriedade de variâncias de duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , que estabelece  $\text{var}(mX+nY) = m^2\text{var}X + n^2\text{var}Y$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$  (II) temos

$$\text{var}[V_H(t_3) - V_H(t_1)] = \text{var}[V_H(t_2) - V_H(t_1)]/4 + \Delta^2$$

A variância  $\Delta^2$  é determinada pela condição de que o incremento de  $t_1$  para  $t_3$  deve satisfazer a relação (I). Por essa relação,

$$\text{var}[V_H(t_3) - V_H(t_1)] = |t_3 - t_1|^{2H} \sigma^2$$

ou

$$\text{var}[V_H(t_3) - V_H(t_1)] = |t_2 - t_1|/2|^{2H} \sigma^2$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |t_2 - t_1|/2|^{2H} \sigma^2 - |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2 / 4 = \\ &= (1/2^{2H} - 1/4) |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2. \end{aligned}$$

Aplicando-se esse procedimento sucessivamente, para geração de um novo ponto no interior de cada um dos intervalos existentes, pode-se aprofundar o detalhamento do processo até o nível desejado.

### 3. Extensão do Movimento Browniano Fracionário para o Caso Bidimensional - Superfícies Fractais

Passamos, agora, a descrever uma experiência de simulação de realismo de paisagens, usando o modelo de fractais randômicos, baseada numa extensão do modelo de movimento Browniano fracionário em uma dimensão descrito na seção anterior.

Assumimos como condição inicial a existência de um conjunto de dados constituído de pontos  $p_i =$

$(x_i, y_i, z_i)$  de uma superfície. Em uma primeira etapa, construímos uma aproximação da superfície através de retalhos triangulares planos, triângulos esses que têm como vértices os pontos conhecidos da superfície (figuras 2 e 3).

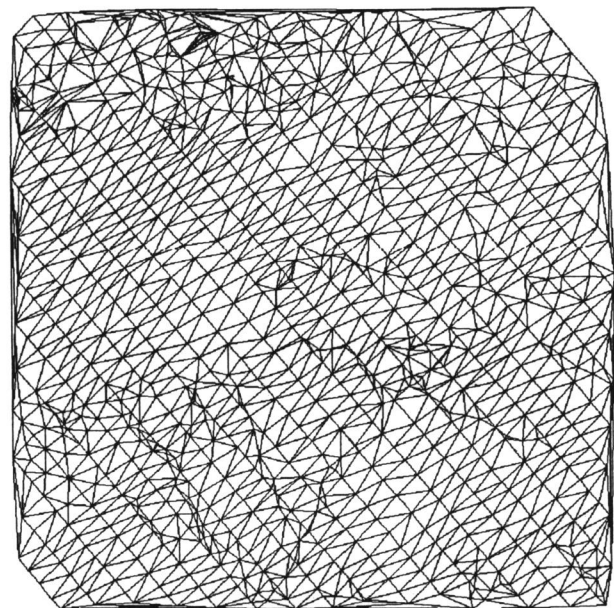


Figura 2: triangulação plana

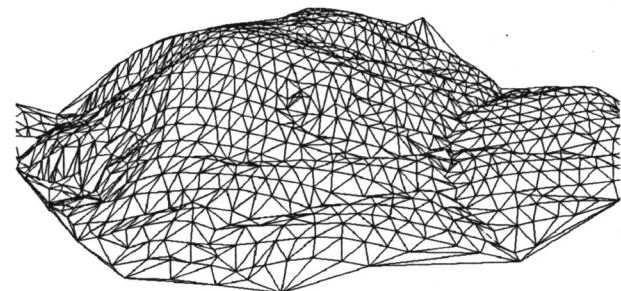


Figura 3: superfície aproximada por triângulos

A construção dessa malha de retalhos triangulares baseia-se no critério de Delaunay (triangulação de Delaunay) aplicado sobre as projeções dos pontos  $p_i$  no plano  $XY$ . Em [Neves(1988)] encontra-se uma descrição desse modelo de superfície, bem como da estrutura de dados e algoritmos envolvidos em sua construção. Discussões sobre outros critérios para construção de triangulações para modelagem de superfícies são encontradas em [Dyn(1990)] e [Brown(1991)].

Ressaltamos aqui duas características desse modelo: a superfície gerada interpola os dados originais; e, por ser um modelo linear por partes, a interpolação de novos pontos tem um custo computacional muito baixo, o que é importante neste

trabalho, uma vez que o processo que descreveremos utiliza intensivamente essa operação.

Também vale observar que a implementação descrita em [Neves(1988)] utiliza um algoritmo incremental, permitindo a inclusão de novos pontos em uma triangulação já existente, o que, como veremos, é essencial para o refinamento da estrutura na construção do fractal.

**Movimento Browniano fracionário baseado em triangulação**

O processo adotado para construção do fractal é uma variante do método de deslocamento aleatório do ponto médio, descrito na seção 2.

Uma vez construída a triangulação inicial, realiza-se o refinamento dessa estrutura pela inserção de pontos nos baricentros dos triângulos existentes. Após cada inserção, faz-se necessária uma atualização da triangulação para reconstituição do critério de Delaunay.

O valor da terceira coordenada, z, de cada um desses novos pontos, é constituído, como no caso unidimensional, por duas parcelas: a primeira é proveniente de interpolação linear, considerando que o ponto esteja situado no plano do triângulo que lhe deu origem; a segunda parcela é proveniente do deslocamento randômico característico do movimento Browniano. Assim, considerando p um novo ponto inserido no baricentro de um triângulo abc, temos

$$z_p = (z_a + z_b + z_c) / 3 + d. \quad (III)$$

Para determinar essa segunda parcela, lembremos que o movimento Browniano fracionário requer que os incrementos tenham distribuição Gaussiana com média zero e variância proporcional à distância, conforme a relação

$$\text{variância} \propto \text{distância}^{2H} \quad 0 < H < 1.$$

Para o caso bidimensional, a relação entre H e a dimensão fractal é

$$D = 3 - H.$$

A distância é medida no plano XY, e então podemos escrever

$$\text{var}(z_k - z_l) \propto \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}^{2H}$$

Considerando que a variância dos incrementos da cota z, correspondentes a deslocamentos unitários no plano XY, seja  $\sigma^2$ , temos que

$$\text{var}(z_k - z_l) = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}^{2H} \sigma^2 \quad (IV)$$

O deslocamento d, na expressão (III), é uma variável aleatória com distribuição Gaussiana com média zero e variância  $\Delta^2$ .

A determinação dessa variância leva em conta a vizinhança sendo, portanto, mais simples no caso unidimensional, uma vez que a definição de vizinhança de um ponto é trivial. Além disso, em uma dimensão, cada inserção é feita no ponto médio de um intervalo e, por isso, o fator de diminuição das distâncias entre pontos é constante igual a 1/2.

No caso bidimensional, no entanto, a vizinhança é definida por uma quantidade de pontos que depende da estrutura de organização dos dados. Considerando uma estrutura de malha quadrada regular, o refinamento se dá por inserção de novos pontos nos centros dos quadrados [Peitgen-Saupe (1988)]. Sendo assim, as distâncias entre pontos também diminuem a um fator constante, igual a  $1/\sqrt{2}$ , permitindo determinar a nova variância  $\Delta_i^2$  a partir da variância usada no estágio anterior, simplesmente pela expressão

$$\Delta_i^2 = [1/\sqrt{2}]^{2H} \Delta_{i-1}^2.$$

Em nossa abordagem, consideramos que os dados podem estar distribuídos aleatoriamente no plano XY, e por isso, apesar da construção da triangulação ser regida pelo critério de Delaunay, podem-se obter triângulos bastante variados em forma e tamanho. Em consequência disso, o cálculo da variância do deslocamento randômico precisa ser feito individualmente para cada triângulo, ou seja, para cada ponto inserido.

Chamemos  $z_{abc}$  a contribuição da interpolação para a cota do novo ponto p. Então

$$z_p = z_{abc} + d$$

onde

$$z_{abc} = (z_a + z_b + z_c) / 3.$$

É necessário encontrar a variância de d de forma a compatibilizar  $z_p$  com os requisitos de movimento Browniano fracionário, que se referem a incrementos, ou seja, diferenças de cotas entre pontos. Para isso, façamos uma translação, de forma a gerar expressões entre incrementos, tornando uma das cotas, digamos  $z_a$ , igual a zero :

$$z_p - z_a = (z_{abc} - z_a) + d$$

Como  $(z_{abc} - z_a)$  e d são variáveis aleatórias independentes, pela propriedade (II) temos que

$$\text{var}(z_p - z_a) = \text{var}(z_{abc} - z_a) + \text{var} d$$

e então

$$\text{var} d = \text{var}(z_p - z_a) - \text{var}(z_{abc} - z_a) = \Delta^2 \quad (V)$$

De (IV), a variância desejada para  $z_p - z_a$  é

$$\text{var}(z_p - z_a) = \sqrt{(x_p - x_a)^2 + (y_p - y_a)^2}^{2H} \sigma^2.$$

Resta-nos avaliar a variância de  $(z_{abc} - z_a)$ , o que fazemos a partir da configuração atual dos dados na

vizinhança, considerando a variância das diferenças ( $z_{abc}-z_*$ ), onde  $z_*$  representa  $z_a$ ,  $z_b$  e  $z_c$ .

Finalmente, para a determinação do valor final de  $\Delta^2$ , devemos levar em conta que, devido à irregularidade dos triângulos, esse resultado não é o mesmo se a translação realizada no eixo Z, para gerar expressões entre incrementos de cotas, for feita com base em um dos outros dois vértices do triângulo. Assim sendo, o processo deve ser repetido para cada um dos vértices, resultando em três valores para d:  $d_a$ ,  $d_b$  e  $d_c$ . Visando a equiparação da influência dos três pontos, consideramos d como sendo a média dos três valores:

$$d = (d_a + d_b + d_c) / 3$$

e, como as três componentes da expressão à direita são variáveis aleatórias independentes, a propriedade (II) permite considerar

$$\text{var } d = (\text{var } d_a + \text{var } d_b + \text{var } d_c) / 9 = \Delta^2 \quad (\text{VI})$$

simplificando o cálculo de d a um único sorteio aleatório.

#### 4. Implementação

Utilizamos como ponto de partida um subconjunto dos módulos de construção e manutenção de uma triangulação de Delaunay no plano, descritos em [Neves(1988)], implementados em Pascal.

Sobre esse núcleo, implementamos o processo de refinamento da triangulação. Esse processo tem como um de seus parâmetros o número de pontos a serem inseridos e, para cada inserção, escolhe aleatoriamente o triângulo onde ela se dará, sorteando um ponto qualquer, com distribuição uniforme dentro do domínio definido pelo fecho convexo dos pontos existentes, e determinando o triângulo sobre o qual o sorteio incidirá. A inserção é feita no baricentro desse triângulo. Também é possível controlar a dimensão fractal e a variância dos incrementos, características estas que podem ser diferenciadas por regiões. Caso essa diferenciação exista, as regiões são definidas por centros de influência, cada um deles caracterizado por sua posição no plano XY, pela dimensão fractal e variância dos incrementos de z para distâncias unitárias. O programa interpreta como região de abrangência de cada um desses centros, o polígono de Voronoi a ele associado, em relação aos demais centros. Os casos de fronteira são resolvidos trivialmente, considerando que o ponto pesquisado pertença à região de influência do primeiro centro encontrado, sobre cuja fronteira ele se situe.

Caso as variâncias iniciais não sejam fornecidas, será determinada a variância característica dos dados iniciais, ficando esse valor associado a todos os centros de influência.

O caso de não especificação da(s) dimensão(ões) fractal(is) não é tratado no estágio atual da implementação. Deixamos como sugestão, para uma versão futura, as propostas de estimação da dimensão fractal inerente aos dados iniciais apresentadas em [Polidori(1991)].

Quanto à avaliação da variância de ( $z_{abc}-z_a$ ), que deveria ser feita para cada triângulo, adotamos, por simplicidade, o procedimento de calcular essa variância levando em conta toda a massa de dados existente em um determinado estágio. Esse valor continua sendo usado para novas inserções até que o número de pontos seja duplicado, quando então o cálculo é refeito.

Consideramos esse critério razoável pelas razões que passamos a expor. O número total de triângulos, t, em uma triangulação qualquer é dado pela fórmula [Maus (1984)]:

$$t = 2(n-1) - m$$

onde n é o total de vértices e m é o número de vértices pertencentes ao fecho convexo. Considerando que os vértices estão distribuídos uniformemente em um domínio definido por um polígono, m é muito pequeno em relação a n [Preparata-Shamos(1985)]. Sendo assim o número de triângulos é próximo de duas vezes o número de vértices da triangulação e, portanto, ao inserir uma quantidade de novos pontos igual à que existia no início de um estágio, quando a variância foi calculada, terão sido processados pouco mais da metade dos triângulos existentes naquele momento.

Em uma abordagem mais rigorosa, pode-se definir uma vizinhança restrita para cada triângulo, sobre a qual será calculada a variância de ( $z_{abc}-z_a$ ), válida apenas para o triângulo em questão.

No final deste texto encontram-se algumas figuras correspondendo, respectivamente, a: a) versão colorida da figura 3, representando os dados iniciais (cerca de 1000 pontos); b) superfície fractal obtida a partir dos dados da figura 3, pela inserção de 40.000 pontos na fase de refinamento, com dimensão fractal 2,15; c) obtida como no caso anterior, com dimensão fractal 2,5.

#### 5. Avaliação

O processo incremental de construção de uma triangulação, adotado neste trabalho, tem complexidade de tempo  $O(N^2)$  no pior caso [Guibas-Stolfi (1985)]. No entanto, através de uma pré-ordenação baseada em uma árvore quaternária, esse processo é realizado em tempo linear na média [Ohia et al. (1984)].

A forma aleatória adotada na escolha de triângulos para inserções, exige esforço equivalente ao de construção de uma triangulação a partir de um conjunto qualquer de pontos, apesar de serem essas inserções realizadas em posições particulares (baricentros de triângulos existentes).



Foi experimentada uma forma não aleatória para essas inserções, baseada em um processamento ordenado dos triângulos existentes. Essa opção fornece um resultado teórico mais vantajoso,  $O(N)$  no pior caso (não incluindo a geração da triangulação dos dados iniciais).

A escolha do processo aleatório deveu-se à maior uniformidade da distribuição final dos pontos e a uma menor tendência à produção de triângulos degenerados (muito delgados) nas bordas.

É preciso considerar, também, o custo de avaliação da variância de  $(z_{abc}-z_a)$ . A complexidade em tempo da forma simplificada adotada para o cálculo desse parâmetro é  $O(N)$ , onde  $N$  é o número de pontos a serem inseridos no refinamento.

Para vermos isto, consideremos  $K$  o número de elementos do conjunto inicial de dados. Como vimos, o número de faces em uma triangulação de pontos uniformemente distribuídos é um pouco menor do que duas vezes o número de vértices. Usando esse valor como parâmetro representativo do esforço computacional para o cálculo da variância, temos que no início do primeiro estágio, quando existem apenas  $K$  pontos, o número de triângulos é menor do que  $2K$ ; no início do segundo estágio, existem  $2K$  pontos e menos do que  $4K$  triângulos; no início do  $l$ -ésimo estágio, existem  $2^{l-1}K$  pontos e o número de triângulos é menor do que  $2^l K$ . Supondo que no decorrer do  $l$ -ésimo estágio o número de inserções alcance os  $N$  novos pontos requeridos, podemos afirmar, sobre o total de triângulos ( $T$ ) usados em todas as  $l$  avaliações de variância, que

$$T < 2(K+2K+4K+\dots+2^{l-1}K) \text{ ou } T < 2K \sum_{i=1}^l 2^{i-1}$$

Observemos, também, que  $\sum_{i=1}^{l-1} 2^{i-1} < 2^{l-1} \forall l$

e que  $2 \sum_{i=1}^{l-1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{l-1} 2^i > 2^{l-1}$

Mas,  $N > K \sum_{i=1}^{l-1} 2^{i-1}$ , porque, senão, o processo teria terminado no estágio anterior.

Dai,  $2N > 2K \sum_{i=1}^{l-1} 2^{i-1} = K \sum_{i=1}^{l-1} 2^i > 2^{l-1} K$ ,

e, como

$$2K \sum_{i=1}^l 2^{i-1} = 2K \sum_{i=1}^{l-1} 2^{i-1} + 2K \cdot 2^{l-1} < 2N + 4N = 6N$$

então,  $T < 6N$ , confirmando assim que o processo de avaliação de variâncias adotado tem complexidade de tempo  $O(N)$ .

Essa conclusão permaneceria verdadeira se adotássemos a outra abordagem a que nos referimos, considerando uma vizinhança restrita para cada triângulo, desde que essa vizinhança fosse definida em termos de um número máximo (constante) de triângulos.

**6. Conclusão**

O cálculo da variância do deslocamento, feito individualmente para cada ponto inserido, como no esquema descrito, requer um esforço computacional significativo, que consiste do cálculo da variância de  $(z_{abc}-z_a)$  e da aplicação das expressões (V) e (VI), o que não é necessário, por exemplo, na abordagem de malha quadrada.

Quanto ao resultado visual, como pode ser visto em [Peitgen-Saupe(1988)], o esquema de malha quadrada induz a formação de estruturas lineares indesejáveis, devido à regularidade da malha, que privilegia direções. Essa característica produz um efeito visual não natural e a sua eliminação exige cuidados que aumentam o custo computacional do método. Veja-se, por exemplo, o procedimento de "adições randômicas sucessivas", descrito naquele livro.

Esse problema de direções privilegiadas não ocorre no caso de malha triangular irregular, onde as direções de arestas e formatos de triângulos variam constantemente ao longo do processo de refinamento, para manter a validade do critério de Delaunay na triangulação.

Outra característica da técnica utilizada neste trabalho é que os pontos pertencentes ao conjunto de dados iniciais permanecem sendo interpolados ao longo de todo o processo de refinamento e, conseqüentemente, no resultado final.

**Agradecimentos**

Aos órgãos que participam do financiamento deste trabalho: CNPq, CAPES, FINEP, MCT.

**Referências Bibliográficas**

A. Mauss, *Delaunay Triangulation and the Convex Hull of N Points in Expected Linear Time*, BIT, vol.24, pp 151-163, 1984.  
 B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., 1982  
 B.B. Mandelbrot and J.W. Ness, *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, SIAM Review, vol.10, no 4, pp 422-437, 1968

- F. Preparata and M.I. Shamos, *Computational Geometry - An Introduction*, Springer-Verlag, 1985
- H. Peitgen and D.S. Saupe, *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1988
- J.L. Brown, *Vertex Based Data Dependent Triangulations*, Computer Aided Geometric Design, vol. 8, pp 239-251, 1991
- J.M. Neves, *Sistema Interativo para Mapeamento Baseado em Triangulação de Pontos no Plano*, Dissertação de Mestrado (COPPE/UFRJ), 1988
- L. Polidori, *Validation de Modeles Numeriques de Terrain, Application a la Cartographie des Risques Geologiques*, Tese de Doutorado (Université Paris-7), 1991.
- L. Guibas and Stolfi, *Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams*, ACM Transactions on Graphics, vol.4, no 2, pp 74-123, 1985.
- N. Dyn, D. Levin and S. Rippa, *Data Dependent Triangulations for Piecewise Linear Interpolation*, IMA Journal of Numerical Analysis, vol.10, pp 137-154, 1990
- T. Ohia, M. Iri and K. Murota, *Improvements os the Incremental Method for the Voronoi Diagram, with Computational Comparison of Various Algorithms*, Journal of Operations Research Society of Japan, vol.27, no 4, pp 306-336, 1984.

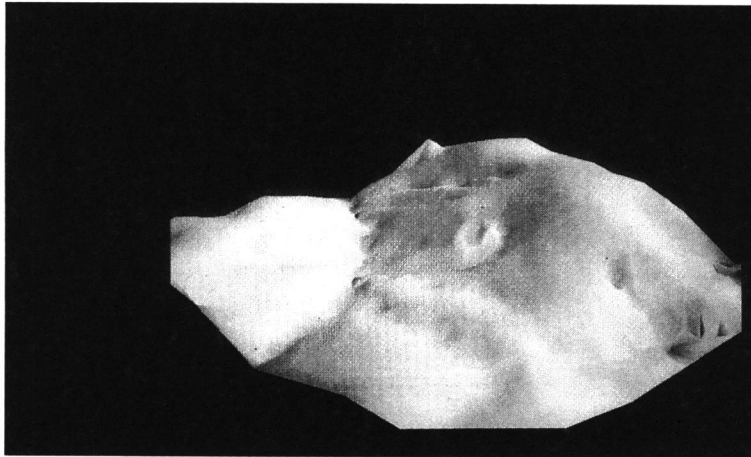


Figura a: fotografia da superfície ajustada sobre os dados originais



Figura b: refinamento dos dados originais com dimensão fractal 2,15



Figura c: refinamento dos dados originais com dimensão fractal 2,5