

**APROXIMAÇÃO LINEAR POR PARTES DE
VARIEDADES IMPLICITAMENTE DEFINIDAS
USANDO PODA DO ESPAÇO**

Marcelo Salim
(Sistemas-COPPE-UFRJ)

Luís Paulo Bueno
(Sistemas-COPPE-UFRJ)

Ronaldo Marinho Persiano
(Sistemas-COPPE-UFRJ)

Página em branco na versão original impressa.

APROXIMAÇÃO LINEAR POR PARTES DE VARIEDADES IMPLICITAMENTE DEFINIDAS USANDO PODA DO ESPAÇO†

Marcelo Salim¹

Luis Paulo Bueno²

Ronaldo Marinho Persiano³

COPPE-Sistemas, UFRJ
Caixa Postal 68511
Rio de Janeiro - RJ - 21945

ABSTRACT: With the increasing use of Simplicial Methods to represent implicitly-defined manifolds, it turns out to be necessary to develop techniques to improve its performance. In order to guarantee that no subset of the manifold will be lost during the search, all subdivision cells must be visited. This is the main weakness of Simplicial Methods. Some criteria to prune sub-regions of space, which are safely disjoint from the manifold, are presented and discussed.

PALAVRAS-CHAVE: métodos simpliciais, variedades definidas implicitamente, subdivisão espacial e critérios de poda do espaço.

1. Introdução

Em várias áreas, que vão da Visualização Científica à Modelagem de Sólidos, os objetos de interesse são formas no espaço representadas por variedades diferenciáveis descritas na forma implícita. Tais variedades são caracterizadas por uma equação $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tendo 0 por valor regular. O estudo de variedades deste gênero tem sido objeto de muitos trabalhos recentes ([ALLG85], [ALLG87], [CAST90], [TAVA90]) onde são propostos métodos para representá-las por meio da "colagem" de pedaços lineares. Nessas propostas, a variedade original é aproximada por outra definida implicitamente por uma função linear por partes.

Uma solução parcial para a obtenção de uma aproximação deste tipo pode ser imediatamente obtida se for conhecido um ponto da variedade (ou um ponto suficientemente próximo). Neste caso, é possível construir uma célula do espaço ambiente que contém o ponto e intercepta a variedade. A partir daí, constrói-se uma sequência de células contíguas interceptando a componente conexa a que o ponto inicial pertence. Em cada uma dessas células uma aproximação linear da variedade é construída. A solução assim obtida não é completa pois não trata das outras eventuais componentes da variedade!

Como, em geral, não são conhecidos os pontos iniciais para cada componente conexa, o recurso usual consiste em subdividir toda a região de interesse em células, percorrê-las exaustivamente para determinar as células interceptadas pela variedade e nelas computar a aproximação linear. O "tamanho" da célula, caracterizado pelo nível de refinamento da subdivisão, é determinante da qualidade da aproximação final obtida, sendo escolhido em função desta.

Neste trabalho, apresenta-se uma solução alternativa em que se realiza uma subdivisão hierárquica adaptativa da região de interesse. A cada nível desta subdivisão eliminam-se aquelas células que garantidamente não são interceptadas pela variedade e não serão mais, portanto, subdivididas daí em diante: é a poda do espaço ambiente. O uso de uma estrutura de dados adequada permite a localização

† Este trabalho envolve parte da tese de mestrado do primeiro autor e parte dos estudos para qualificação ao doutorado do segundo.

1 Laboratório de Hidrologia da COPPE/UFRJ.

2 Instituto de Física da UFRJ

3 COPPE-Sistemas, Laboratório de Computação Gráfica, UFRJ.

a priori de todas as componentes conexas da variedade sem que toda a região de interesse seja esquadrinhada ao nível mínimo de subdivisão.

A poda exigirá, portanto, a identificação das células disjuntas da variedade. Duas metodologias são discutidas para a realização desta tarefa quando a função definidora da variedade é polinomial: uma empregando uma constante de Lipschitz da função em cada célula e a outra utilizando-se da representação da função f na base Bernstein.

No primeiro caso, apesar da garantia da existência dessa constante para funções de classe C^1 , sua determinação para uma função arbitrária é frequentemente inviável e, por conta disto, restringimo-nos às variedades definidas por funções quadráticas. Na tentativa de ampliar a classe de funções tratáveis, consideramos as funções polinomiais. Isto nos leva ao segundo caso, onde a identificação é feita representando-se a função em termos da base de Bernstein e computando-se nessa base os seus coeficientes referentes a uma dada célula. A uniformidade de sinais dos coeficientes garantirá que a célula é, inequivocamente, disjunta da variedade. A escolha das células de um certo tipo - simplexo - permite uma simplificação adicional, tanto do ponto de vista teórico quanto do prático: a subdivisão do espaço é uma triangulação, a definição dos polinômios de Bernstein para um simplexo em R^n é a extensão natural do caso unidimensional e o teste de interferência variedade-simplexo fica mais simples.

2. As Idéias Básicas dos Métodos Simpliciais

Os métodos simpliciais surgiram com o objetivo de aproximar o conjunto de soluções de sistemas de equações não-lineares. Um dos primeiros trabalhos neste sentido foi [SCAR67] que visava aproximar pontos fixos de mapeamentos contínuos. Novos resultados sobre este problema são apresentados em [ALLG80] onde também são tratadas a aproximação de curvas definidas implicitamente, localização de pontos críticos etc. Continuando nesta linha, [ALLG85] e [ALLG87] abordam a aproximação linear de variedades definidas implicitamente.

As etapas desta abordagem podem ser, em linhas gerais, descritas da seguinte forma:

- inicialmente é feita uma decomposição celular do espaço que contém a variedade a ser rastreada, definindo-se o nível de refinamento da aproximação;
- cada célula é, por sua vez, subdividida em simplexos, caracterizando-se uma triangulação do espaço;
- conhecido um simplexo σ da triangulação, que intercepta a variedade, obtém-se uma aproximação linearizada da variedade dentro de σ caracterizada pelas raízes da interpolação linear de f nos vértices de σ ;
- satisfeitas determinadas condições sobre a função e sabendo-se que a triangulação cobre todo o espaço de interesse, pode-se, sem muito esforço, localizar os simplexos vizinhos de σ que também contém uma parte da variedade;
- continua-se, através dos simplexos vizinhos, gerando as aproximações dentro de cada um, até que não restem simplexos vizinhos interceptantes a processar.

Podemos, dentro deste contexto, colocar algumas questões. A localização do espaço de interesse constitui-se no primeiro problema, ou seja, determinar uma região do espaço que contém a variedade pode não ser tarefa muito simples. É sempre possível arbitrar-se, inicialmente, uma região bem vasta do espaço, para se ter uma primeira idéia da variedade e da região que a contém. Baseando-se, então, nos primeiros resultados, redefine-se a região de interesse de forma mais apurada. Embora esta não seja definitivamente, a maneira mais eficiente, ela funciona. O ideal, entretanto, é possuir de antemão informações mais apuradas a respeito da localização da variedade.

Definida a região de interesse do espaço, deve-se proceder a sua decomposição celular seguida de sua triangulação (ou proceder-se a triangulação diretamente). Dependendo da aplicação, a triangulação deve satisfazer a algumas propriedades para garantir-se a qualidade da aproximação. Estudo mais específico sobre estas propriedades encontra-se em [ALLG85] e [ALLG87].

A triangulação comumente adotada é a CFK (Coxeter, Freudenthal e Kuhn) cuja principal vantagem é propiciar a manipulação da geometria da triangulação com matemática inteira, ou seja, de precisão infinita. Além disto, permite a transição entre simplexos vizinhos através de uma regra simples de pivoteamento entre vértices. Detalhes adicionais podem ser encontrados em [ALLG80], [COXE34] e [KUHN68].

Depois da triangulação do espaço de interesse, o algoritmo passa então à fase de cálculos das aproximações lineares da variedade no interior de cada simplexo que a intercepta. Determinado um

simplexo interceptante, a aproximação para toda uma componente conexa da variedade pode ser calculada sem muito esforço pelo *processo de continuação*. Calcula-se a aproximação e move-se para o vizinho, que também é interceptante, até cobrir toda a componente conexa. O principal problema desta fase consiste em localizar um primeiro simplexo interceptante para cada componente conexa da variedade, isto é, garantir que nenhuma componente conexa será ignorada pelo processo.

Um simplexo σ é dito *interceptante* se a função $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que define a variedade, se anula em algum ponto $x \in \sigma$, isto é, se existe $x \in \sigma$ tal que $F(x) = 0$. Naturalmente, a união dos simplexos interceptantes contém a variedade. Mas, em lugar de resolver a equação $F(x) = 0$ nesses simplexos, substitui-se F por uma função linear F_σ que aproxima F em σ . F_σ é a interpolação linear dos valores $F(v_i)$ onde v_i são os vértices de σ . Resolve-se, então, o problema $F_\sigma(x) = 0$, que é bastante mais simples. Na figura 1 pode-se melhor visualizar esta idéia.

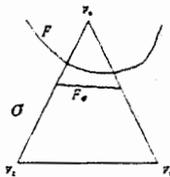


Fig. 1: aproximação linear da variedade em um 2-simplexo.

A interpolação linear F_σ possuirá raízes dentro de σ (onde aproximarão a variedade) se e somente se F exibir nos vértices de σ valores tanto negativos quanto positivos. Simplexos com essa propriedade serão denominados *F-interceptantes*. Note-se que tais simplexos, pela continuidade de F , são seguramente interceptantes à variedade. No entanto, o inverso não é, em geral, verificado.

A maneira mais comumente adotada para resolver tanto o problema de determinação da região de interesse quanto da determinação de um simplexo interceptante inicial para cada componente conexa é percorrer cada possível simplexo da triangulação, verificando se ele é interceptante ou não. Ao final do percurso, ter-se-á encontrado todas as partes da variedade que estiverem dentro da região triangularizada, independentemente de quantas componentes conexas existirem. Embora a classificação de um simplexo, em *F-interceptante* ou não, não seja muito onerosa, a quantidade de testes, em determinados casos, pode ser tão grande que a abordagem simplicial fica inviabilizada. Além disto, definido o nível de refinamento da triangulação, sempre podem existir componentes conexas da variedade que não sejam detectadas, pois simplexos não *F-interceptantes* podem ser interceptantes. Refinar mais a triangulação significa apenas permitir que detalhes menores sejam captados, mas, não nos garante que outros, ainda menores que as dimensões dos simplexos, não escapem à peneira.

Pode-se, também, assumir que detalhes da variedade menores que um determinado tamanho de simplexo não serão consideradas. O trabalho de [SUFF90], por exemplo, define dois níveis de refinamento: um de aceitação da variedade e outro de cálculo. O espaço é inicialmente decomposto até o nível de aceitação, em seguida, vasculhado exaustivamente. As componentes conexas que, eventualmente, não forem detectadas, serão sumariamente ignoradas. Passa-se, então, para o segundo nível de refinamento, agora, com a localização de cada componente conexa.

Nem sempre a localização dos primeiros simplexos representa grave problema. Na aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias, por exemplo, a localização do primeiro simplexo de cada componente conexa está diretamente relacionada com as condições iniciais da equação. Em geral, entretanto, este é um dos mais sérios problemas das técnicas simpliciais.

3. Poda do Espaço

Como já mencionado, a necessidade de se testar cada simplexo da triangulação para determinar os que são interceptantes pode inviabilizar a abordagem simplicial de determinados problemas. O ideal seria abandonar, tão cedo quanto possível, grandes porções do espaço contendo apenas simplexos garantidamente não-interceptantes, isto é, fazer um pré-processamento do espaço de interesse.

eliminando a maior quantidade possível de regiões disjuntas da variedade.

Inicialmente considera-se que uma caixa envolvendo toda a região de interesse já sofreu uma primeira triangulação, isto é, já está totalmente subdividida em um primeiro nível de simplexes "grandes". Define-se, então, um método de subdivisão para os simplexes, atendendo aos requisitos de uma subdivisão hierárquica ([SAME90]), tal que cada um pode ser decomposto em uma família de simplexes menores. Desta forma, organiza-se uma estrutura hierárquica recursiva capaz de triangular todo o espaço até um nível arbitrariamente definido.

No R^2 adota-se um retângulo como caixa envolvente da região de interesse, que pode ser suposto subdividido inicialmente em 4 triângulos, isto é, 4 2-simplexes. Cada triângulo, por sua vez, poderia ser subdividido em 4 subtriângulos, bastando-se tomar a metade de cada lado como sendo um novo vértice. O processo é dito adaptativo porque somente as regiões mais próximas da variedade, em cada nível, vão sendo subdivididas (a semelhança das quadrees). A figura 2 ilustra melhor a situação.

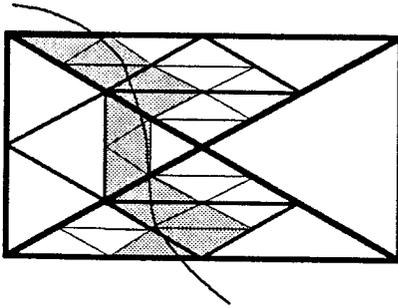


Fig. 2: subdivisão adaptativa da caixa envolvente.

O procedimento *PodaEspaço*, codificado abaixo, implementa esta estratégia. Recebe três parâmetros: *F*, *Simp* e *Nível*. O primeiro parâmetro define a função que está sendo rastreada; *Simp* é o simplexo que deve ser analisado e, eventualmente, guardado; *Nível* refere-se ao nível da triangulação a que pertence o simplexo. O nível 0 é arbitrado como sendo o nível mínimo da subdivisão. *PodaEspaço* faz uso de três procedimentos auxiliares: *ClassificaSimp* que classifica o simplexo *Simp* contra a variedade definida por *F*, *SubdivSimp* que gera um arranjo de simplexes que subdividem *Simp* e *GuardaSimp* que armazena um simplexo para uso posterior.

```

PodaEspaço(F, Simp, Nível)
(
  Classe ← ClassificaSimp(F, Simp);
  IF (Classe = INTERCEPTA) (
    IF (Nível = 0) {
      GuardaSimp(Simp);
    } ELSE {
      S ← SubdivSimp(Simp);
      FOR i ← 1 TO NSubdivisões (
        PodaEspaço(F, S[i], Nível-1);
      )
    }
  )
)

```

O procedimento inicialmente classifica o simplexo perante a função como sendo INTERCEPTA ou NÃO INTERCEPTA. Caso o simplexo seja interceptante e o nível máximo de subdivisão tiver sido alcançado, o simplexo é guardado para posterior processamento; senão, será subdividido por *SubdivSimp* e nova *PodaEspaço* é invocada para cada simplexo da subdivisão.

Ao final do processo, a estrutura de dados alimentada por *GuardaSimp* conterá informações sobre cada simplexo interceptante. Naqueles caracterizados como F-interceptantes no nível inferior da subdivisão, é determinada a aproximação linear da variedade. Se o interesse for apenas visualizá-la, basta exibir cada uma destas aproximações independentemente de sua posição na estrutura de dados. Para outros objetivos, entretanto, torna-se necessário estabelecer as relações de vizinhança na estrutura de dados correspondentes à geometria da triangulação.

A figura 3 mostra uma subdivisão do simplexo "pai" Δ_P nos seus quatro filhos Δ_{f_0} , Δ_{f_1} , Δ_{f_2} e Δ_{f_3} e a estrutura de dados associada. Cada 2-simplexo é sempre subdividido tomando-se os pontos médios de suas arestas. Note-se que os simplexos Δ_{f_0} e Δ_{f_3} são vizinhos na geometria embora não sejam na estrutura de dados.

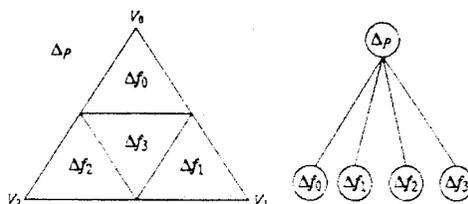


Fig. 3: subdivisão do 2-simplexo Δ_P nos seus quatro filhos.

A classificação de simplexos é a chave do algoritmo. O desejável é que ela nos indique com certeza se a variedade intercepta o simplexo ou não. No entanto, esta verificação é onerosa ou impossível. Uma alternativa seria classificarmos como INTERCEPTANTE todo simplexo duvidoso deixando para subdivisões mais finas a tarefa de uma resposta segura.

Uma primeira aproximação para a classificação é o critério de F-interseção. Embora, aceitável para a classificação de simplexos mínimos, esta alternativa é proibitiva para os níveis mais elevados da subdivisão. O procedimento que se segue implementa esta classificação que denominamos *FClassificaSimp*:

```

FClassificaSimp(F, Simp)
{
  S0 ← SINAL( F( Simp->V0 ) );
  S1 ← SINAL( F( Simp->V1 ) );
  S2 ← SINAL( F( Simp->V2 ) );
  IF ((S0 = S1) AND (S1 = S2) AND (S0 ≠ 0)) {
    RETURN ( NÃO INTERCEPTA );
  } ELSE {
    RETURN ( INTERCEPTA );
  }
}

```

Uma classificação mais segura de simplexos "grandes" requer que se considere informações adicionais sobre o comportamento, de caráter não-linear, de F . Nas duas seções que se seguem, descrevemos duas alternativas aplicáveis a classes particulares de funções.

4. Classificação de Simplexos Pela Constante de Lipschitz

Em uma tentativa de melhorar a técnica de "Ray Casting" de superfícies implícitas, foi proposto por [KALR89] uma subdivisão adaptativa do espaço. O método consiste em avaliar a constante de Lipschitz da função de interesse para cada parte da subdivisão. Eliminam-se as regiões para as quais a constante garante que o volume considerado é não-interceptante. As regiões que não forem eliminadas são novamente subdivididas até atingir-se um nível máximo previamente arbitrado.

Uma constante de Lipschitz L de uma função f numa região X é qualquer real tal que, para qualquer dois pontos x_1, x_2 em X , observa-se $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$. A constante é uma cota superior para a taxa de variação da função f na região X ; portanto, para funções diferenciáveis, seu menor valor possível é o máximo do gradiente de f em norma na região X :

$$L = \max \{ \|\nabla f(x)\|; x \in X \}$$

A classificação de um simplexo σ , baseada na constante de Lipschitz L de F neste simplexo, pode ser feita da seguinte forma: seja x_0 o baricentro de σ e d a maior das distâncias entre x_0 e os vértices de σ , que definem uma bola envolvente do simplexo. Como a maior taxa de variação de F em σ é dada por L , a maior variação no valor de F em σ a partir de $F(x_0)$ é dada pelo produto Ld . Portanto, se $\|F(x_0)\| > Ld$ então F , garantidamente, não se anula em nenhum ponto de σ .

No trabalho citado, usa-se células retangulares (caixas). No presente trabalho, emprega-se a mesma técnica, apenas trabalhando com simplexos e calculando o baricentro e o raio da bola envolvente. Estes cálculos podem ser bastante simplificados pela maneira como é feita a subdivisão do espaço. A figura 4 ilustra o caso do R^2 .

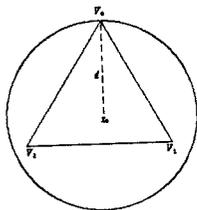


Fig. 4: Bola envolvente a um 2-simplexo: baricentro x_0 e raio d .

Um procedimento seguro de classificação de simplexos fazendo uso da constante de Lipschitz pode ser, em consequência, estabelecido.

```

ClassificaSimp(F, Simp)
{
  S0 ← SINAL( F( Simp→V0 ) );
  S1 ← SINAL( F( Simp→V1 ) );
  S2 ← SINAL( F( Simp→V2 ) );
  IF ((S0 = S1) AND (S1 = S2) AND (S0 ≠ 0)) {
    IF (TesteLipschitz(F, Simp)) {
      RETURN ( NÃO INTERCEPTA );
    } ELSE {
      RETURN ( INTERCEPTA );
    }
  } ELSE {
    RETURN ( INTERCEPTA );
  }
}

```

A classificação é feita calculando-se os sinais da função aplicada a cada vértice do simplexo. Se existem valores com sinais (não nulos) diferentes significa que há interseção com a variedade. Se, entretanto, todos os valores tiverem o mesmo sinal (não nulo) existe a possibilidade do simplexo (e todos os seus descendentes) ser(em) eliminado(s).

A garantia da não interferência entre variedade e o simplexo resulta do procedimento *TesteLipschitz* descrito abaixo onde o procedimento *ConsLipschitz* calcula a constante de Lipschitz de F no simplexo *Simp* enquanto que *BolaEnvolvente* calcula o baricentro x_0 e o raio d da esfera envolvente de *Simp*.

```

TesteLipschitz(F, Simp)
(
  L ← ConstLipschitz(F, Simp);
  (x0, d) ← BolaEnvolvente(Simp);
  RETURN (|| F(x0) || > Ld);
)

```

O procedimento retorna um valor booleano TRUE sempre que o simplexo for garantidamente não-interceptante, isto é, sempre que ele puder ser eliminado. Caso contrário, nada se pode afirmar para este nível de triangulação e uma nova subdivisão deve ser feita, se possível.

Entretanto, calcular a constante de Lipschitz L de F pode ser muito difícil, visto que ela depende do comportamento global de F no simplexo. Se F é diferenciável, o máximo do módulo de seu gradiente seria a melhor constante possível. Mas esse máximo é de avaliação custosa em geral.

Para certas classes de funções, a tarefa de maximizar o gradiente é simplificada: são aquelas funções cujo módulo do gradiente é uma função convexa. De acordo com [ROCK72], toda função convexa em um domínio convexo assume o máximo na fronteira. Em particular, se o domínio for um poliedro convexo, o máximo ocorrerá em um vértice. Maximizar $\|\nabla f(x)\|$ é equivalente a maximizar $\|\nabla f(x)\|^2$ e como simplexos são domínios poliédricos convexos, se $\|\nabla f(x)\|^2$ for convexa, a menor constante de Lipschitz de F resulta do maior valor daquele quadrado nos vértices do simplexo.

Uma classe de funções para as quais as condições acima são verificadas é a das quadráticas. Para estas o critério acima pode ser utilizado sem qualquer dificuldade na avaliação da constante. Classes mais amplas são objeto de investigação.

5. Classificação de Simplexos em Relação a Funções Polinomiais

Na tentativa de generalizar a classe de funções para as quais se pode utilizar a poda do espaço, propomos em seguida um método para variedades descritas por equações polinomiais gerais. Ele será fundado na representação da polinomial na base de Bernstein generalizada.

A base de Bernstein tem se mostrado, por suas propriedades, adequada para a representação de curvas e superfícies paramétricas polinomiais ([FAR186]). Ela apresenta, entretanto, propriedades também adequadas para a aferição da existência de raízes de equações polinomiais. A base de Bernstein para polinômios de grau m é definida por:

$$B_i^m(t) = \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i (1-t)^{m-i} \quad i=0, \dots, m$$

Por ser uma base do espaço de polinômios de grau m , todo polinômio p deste espaço pode ser expresso na forma:

$$p(t) = \sum_0^m c_i B_i^m(t)$$

onde os reais c_i são os coeficientes de Bézier de p . Em sua forma generalizada, ela permite a representação de polinômios de várias variáveis.

No caso de polinômios de duas variáveis ([FAR186]), a base assume a forma:

$$B_{ij}^m(u, v) = \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} u^i v^j (1-u-v)^{m-i-j} \quad i, j=0, \dots, m \quad i+j \leq m$$

Para polinômios de maior número de variáveis, o trabalho de [SEID89] permite exprimir a base em forma conveniente.

Denominamos *simplexo unitário de R^n* , denotado σ^n , àquele cujos vértices são formados pela origem e os pontos do espaço em que a única componente não nula é igual a um. Independente do grau e do número de variáveis, as funções da base de Bernstein generalizada em R^n possuem valores no intervalo $[0, 1]$ em σ^n . Desta propriedade fundamental decorre que, para qualquer polinômio p em R^n , p é positivo (negativo) em σ^n desde que todos seus coeficientes de Bézier sejam positivos (negativos). Em particular, p possuirá raízes em σ^n somente se apresentar coeficientes de Bézier com valores tanto positivos quanto negativos.

As propriedades acima podem ser generalizadas para qualquer simplexo se recorrermos à representação de pontos do espaço em coordenadas baricêntricas do simplexo considerado. Dado um

simplexo σ qualquer de R^n , qualquer ponto deste mesmo espaço pode ser expresso como combinação linear afim dos vértices v_i de σ :

$$x = \sum_0^n \alpha_i \cdot v_i$$

A $(n+1)$ -upla $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é chamada *representação baricêntrica* de x . As coordenadas baricêntricas possuem sempre soma unitária ((FARI86)).

Fundados naquela propriedade podemos codificar um procedimento seguro de classificação de simplexos em relação a variedades definidas por polinomiais. No código abaixo, o procedimento classifica um simplexo *Simp* contra a polinomial cujos coeficientes de Bézier para *Simp* constam do arranjo *C*; o procedimento auxiliar *ContemZero* retorna TRUE somente se o zero pertence ao menor intervalo que inclui todos os valores de *C*.

```
BézierClassSimp(C)
{
  IF (ContemZero(C)) {
    RETURN (INTERCEPTA);
  } ELSE {
    RETURN (NÃO INTERCEPTA);
  }
}
```

O procedimento *BézierClassSimp* é seguro mas conservador. Em decorrência das condições anteriormente enunciadas, simplexos não interceptantes podem vir a ser classificados por ele como INTERCEPTANTES. Naturalmente, nenhum simplexo interceptante lhe escapa. Note-se que o procedimento não faz uso explícito do simplexo a ser testado. De fato, o simplexo está, de certa forma, embuído na representação *C* da polinomial.

Para que este procedimento de classificação possa ser posto em uso pela *PodaEspaço* devemos computar para a polinomial *F* o arranjo de seus coeficientes de Bézier relativos ao simplexo a testar. Para tal cálculo, a teoria de *blossom* de polinomiais e a sua relação com a base de Bernstein é fundamental. Está fora do escopo de trabalho detalhar a teoria envolvida que propicia aquele desenvolvimento. Recomendamos o trabalho de [SEID89], onde é apresentada. De posse do procedimento de cálculo dos coeficientes de Bézier de uma polinomial *F* em um simplexo *Simp*, o procedimento de classificação fica simplesmente:

```
ClassificaSimp(F, Simp)
{
  C ← CoefBézier(F, Simp);
  RETURN( BézierClassSimp(C) );
}
```

A *ClassificaSimp* baseada na análise dos coeficientes de Bézier é conservadora e por isso adequada à poda por não sugerir a eliminação de nenhum simplexo interceptante. No entanto, a *PodaEspaço* resultante acabará por guardar tanto simplexos interceptantes (F-interceptantes ou não) como alguns simplexos mínimos não interceptantes (e naturalmente não F-interceptantes). Mas, na fase de construção da aproximação linear dos simplexos, somente os simplexos F-interceptantes serão considerados pelo método. Para os demais, não se tem aproximações lineares aceitáveis.

6. Observações Finais

Na modelagem de sólidos, todas as formas de representação (CSG, B-Rep, Octrees etc) possuem, cada uma, grandes qualidades e graves defeitos, não habilitando qualquer delas a ser rotulada como "a melhor". A utilização de modeladores híbridos que visam combinar qualidades e minimizar defeitos das várias formas de representação já é bastante comum nos dias de hoje. É exatamente neste contexto, mais especificamente na conversão CSG→B-Rep, que se encaixa o presente trabalho.

A técnica de poda do espaço aqui apresentada além de melhorar a eficiência dos algoritmos de representação simplicial de variedades de dimensão $p-1$ em R^p ($p = 2,3$) definidas implicitamente por funções polinomiais, resolve também o problema da localização de todas as suas componentes conexas.

Pretende-se utilizá-la para tratar o problema de representar os semi-espacos definidos por funções polinomiais e as operações booleanas de UNIÃO, INTERSEÇÃO e DIFERENÇA entre esses semi-

espaços, através do uso de funções MIN e MAX a elas aplicadas ([MIRA89]). Assim poderemos empregá-la na conversão CSG→B-Rep, se os sólidos CSG são construídos por semi-espaços definidos por funções polinomiais de, em princípio, qualquer grau. Estes sólidos poderão ser aproximados linearmente por partes de uma maneira mais eficiente, sem que nenhuma de suas componentes conexas seja perdida no processo (a menos daquelas com dimensões menores que o simplexo mínimo). A técnica de poda do espaço por meio da representação na base Bernstein possibilita, assim, a ampliação do poder de expressão dos modeladores CSG.

Este trabalho é, na verdade, a primeira etapa de um projeto mais amplo que pretende utilizar métodos simpliciais na busca de soluções para diversos problemas em computação gráfica, alguns dos quais já mencionados: interseção de superfícies polinomiais, visualização de sólidos CSG etc, bem como suas aplicações na visualização em computação científica, pois esta emprega, muito frequentemente, variedades definidas implicitamente.

BIBLIOGRAFIA

- [ALLG80] E. Allgower e K. Georg. "Simplicial and Continuation Methods for Approximating Fixed Points and Solutions to Systems of Equations". SIAM REVIEW - Vol 22 - Nº 1 - 1980.
- [ALLG85] E. Allgower e P. Schmidl. "An Algorithm for Piecewise-Linear Approximation of an Implicitly Defined Manifold". SIAM J. Numer. Anal. - Vol 22 - Nº 2 - 1985.
- [ALLG87] E. Allgower e S. Gnutzmann. "An Algorithm for Piecewise-Linear Approximation of Implicitly Defined Two-Dimensional Surfaces". SIAM J. Numer. Anal. - Vol 24 - Nº 2 - 1987.
- [CAST90] A. Castelo, S. Freitas e G. Tavares. "PL Approximation to Manifolds and Its Application to Implicit ODEs". Lect. Appl. Math. (Amer. Math. Soc.) - Vol 26 - 1990.
- [COXE34] H. Coxeter. "Discrete Groups Generated by Reflections". Ann. Math. - Vol 35 - 1934.
- [FARI86] G. Farin. "Triangular Bernstein-Bézier Patches". CAGD - Vol. 3 - Nº 2 - 1986.
- [KALR89] D. Kalra e A. Barr. "Guaranteed Ray Intersections with Implicit Surfaces". ACM Comp. Graph. - Vol 23 - Nº 3 - 1989.
- [KUHN68] H. Kuhn. "Simplicial Approximations of Fixed Points". Proc. Nat. Acad. Sci. USA - Vol 61 - 1968.
- [MIRA89] J. Miranda e G. Tavares "Métodos Simpliciais em Computação Gráfica". 17º Colóquio Brasileiro de Matemática - 1989.
- [ROCK72] R. Rockafellar. "Convex Analysis". Princeton University Press. 1972.
- [SAME90] H. Samet. "The Design and Analysis of Spatial Data Structures". Addison-Wesley - 1990.
- [SCAR67] H. Scarf. "The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping". SIAM J. Appl. Math. - Vol 15 - Nº 5 - 1967.
- [SEID89] H. Seidel. "A General Subdivision Theorem for Bézier Triangles". Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, pp 573-581, Academic Press - 1989.
- [SUFF90] K. Suffern. "Quadtree Algorithms for Contouring Functions of Two Variables". The Computer Journal - Vol 33 - Nº 5 - 1990.
- [TAVA90] G. Tavares e J. Miranda. "Concordance Operations for Implicitly-Defined Manifolds". Preprint, 1990.

AGRADECIMENTOS

Os autores expressam sinceros agradecimentos a todo o pessoal do Laboratório de Computação Gráfica (LCG) da COPPE/UFRJ pelo apoio (técnico e moral), sugestões e o ambiente de trabalho oferecidos durante a elaboração deste artigo. Este trabalho foi parcialmente financiado pela FINEP e pelo FIPEC.