

MÉTODO DA MÁXIMA ENTROPIA PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS

Nilson Costa Roberty

Maria Luiza Reis

Virgínia Reis Crispim

PEN/COPPE/Universidade Federal do

Rio de Janeiro

CP 68509, 21945 - Rio de Janeiro

INTRODUÇÃO:

O método da máxima entropia tem despertado grande interesse devido a sua aplicabilidade em problemas de reconstrução de imagens em que o número de projeções disponíveis é pequeno.

Suas aplicações estão no campo da tomografia, neutrongrafia, diagnóstico de plasma, radioastronomia, ensaios não destrutivos, acústica submarina, prospecção geológica, entre outros; sempre no sentido de obter a melhor aproximação do objeto analisado a partir das suas projeções.

Existem outros métodos de reconstrução de imagens com resultados muito positivos e amplamente usados, os mais comuns são os métodos analíticos tais como retroconvolução filtrada e inversão de Fourier. Esses métodos são preferidos quando se trata de muitas projeções pois são bem mais rápidos. As restrições ao seu uso estão geralmente ligadas ao número de projeções. No caso da retroconvolução filtrada, por exemplo, Lewitt [1] cita como referência para limite de aplicação a seguinte desigualdade:

$$N - 1 > \pi \cdot M/2 \quad \text{onde } N \text{ é o número de projeções e} \\ M \text{ é o número de faixas por projeção}$$

Outros métodos iterativos, assim como o método da máxima entropia, se propõem a resolver problemas de reconstrução de imagens com poucas projeções, dentre estes o mais conhecido é o MART (*Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique*) que usa fatores multiplicativos que levam à convergência do algoritmo.

PROBLEMA DE RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS:

O problema de reconstrução de imagens consiste na obtenção da função densidade dentro de um domínio que se limita a uma região de interesse. Esse conhecimento torna possível a identificação de contornos, vazios e diferenças de materiais dentro dos limites analisados. No contexto deste trabalho, a análise consiste em expor esta região a uma emissão direcionada que é captada de modo que a imagem resultante corresponda à projeção dos objetos existentes se gundo um determinado ângulo.

A informação obtida do detetor é discretizada de forma que, para cada ângulo de projeção, tenham-se várias faixas paralelas cuja largura depende da discretização feita.

Concluídas as projeções, verifica-se que o domínio foi subdividido da forma mostrada na figura 1. É a partir desta subdivisão natural que trabalha o princípio da máxima entropia. Segundo este princípio, a partição formada é a base para reconstrução da imagem a partir da qual poder-se-á obter a melhor solução consistente com os dados de projeção.

ENTROPIA:

Entropia é um conceito muito útil em estatística e em teoria da informação. A partir da interpretação feita nestas áreas é que poderemos ver co mo a maximização da entropia nos irá fornecer a melhor solução para problema posto.

Pode-se definir quantidade de informação como uma função que fornece o valor da incerteza a respeito da ocorrência de um evento, isto é, se já sabemos a priori que um determinado evento irá ocorrer, então, se transcorrido o fenômeno, nos é dito que aquele evento ocorreu, isto não constitui informação adicional alguma e portanto a quantidade de informação associada ao fenômeno é considerada igual a zero.

Assumindo que a informação é uma função contínua do logaritmo da pro babilidade de ocorrência de determinado evento temos:

$$I(a_i) = h(\log p(a_i)) \quad (1)$$

onde: $I(a_i)$ é a quantidade de informação em relação à a_i

$p(a_i)$ é a probabilidade do evento a_i

O valor esperado desta informação em relação ao fenômeno X levando em conta todos os m elementos possíveis será:

$$E[I(x)] = h \cdot \sum_{j=1}^m P(a_j) \cdot \log(P(a_j)) \quad (2)$$

Sem perda de generalidade pode-se atribuir à constante h o valor -1 de modo que o valor esperado seja sempre positivo pois $0 \leq P(a) \leq 1$.

O valor esperado da informação definida desta maneira é chamada entropia.

MÉTODO DA MÁXIMA ENTROPIA:

O algoritmo que será apresentado usa a definição de entropia da seção anterior. Neste caso, a probabilidade é uma função associada à função densidade do objeto que consideramos constante em cada elemento da partição pois estes elementos constituem a partição mínima consistente com os dados.

Desta forma, definindo alguns parâmetros que usaremos daqui adiante, chega-se à entropia.

- . $e(n_1, n_2, \dots, n_J)$ elemento da partição formado pela interseção das faixas n_1, n_2, \dots, n_J sendo n_i uma faixa da projeção i que vai de 1 até J;
- . $e(n_1, n_2, \dots, n_J/n_k)$ elemento da partição formado pelas interseções das faixas n_1, n_2, \dots, n_J restrita à faixa n_k ;
- . $a(e(n_1, \dots, n_J))$ área do elemento;
- . $F(e(n_1, \dots, n_J))$ função densidade do elemento;
- . $P(j, n_j)$ projeção normalizada da faixa n_j da projeção j;
- . A área total do objeto.

Feitas as definições, é possível calcular a entropia segundo a expressão abaixo:

$$\eta = - \sum_e F(e(n_1, \dots, n_J)) \cdot \log [F(e(n_1, \dots, n_J)) \cdot a(e(n_1, n_J)) / A] \quad (3)$$

CÁLCULO DA MALHA:

No primeiro programa, são calculados para todos os elementos da partição, o centróide e a área. Para isso, ele faz uso de uma subrotina também elaborada para o programa que, dadas as faixas compreendidas entre as retas, calcula a área e os vértices da poligonal formada por estas. Conhecendo esses dados é possível encontrar o centróide cujas coordenadas são gravadas em arquivo juntamente com a área.

Na verdade, para casos em que a malha é formada por projeções cujos ângulos entre estas são iguais, a figura resultante tem um aspecto periódico ao redor de um ponto central e o cálculo dos elementos é feito para apenas uma seção da poligonal convexa mínima que envolve o domínio circular. Para esses casos, o número de cálculos fica reduzido pois esta região compreende uma fração apenas 1 sobre 2 vezes o número de projeções do número de elementos da malha.

Como a subrotina poligonal constitui no ponto chave deste programa, será feita breve uma descrição sobre esta:

Os parâmetros de entrada da subrotina são: o número de projeções e, para cada reta que limita a região de interseção, dois parâmetros que são: distância ao centro e ângulo formado pela perpendicular com a abscissa. Durante a execução é feita uma busca ordenada de vértices partindo da primeira reta. Esses vértices são os pontos de interseção contidos na região interior a todas as faixas. A medida que um vértice é encontrado, a reta de origem é abandonada e aquela a qual a primeira se interseptou se torna a nova reta de origem continuando o processo. As retas cujas interseções com a poligonal são de apenas um ponto, isto é, aquelas que apenas tangenciam o polígono, são abandonadas retornando o algoritmo à reta anterior. A busca termina quando é encontrado um segundo vértice da a reta inicial, fechando a figura.

Após esta etapa, com todos os vértices conhecidos, é chamada a subrotina que calcula área a partir dos vértices ordenados usando a integração por partes. As áreas dos trapézios formados pelos pares de vértices são somadas ponderadas pelo sinal do sentido de integração. Essa etapa, testada com grande número de vértices é quase imediata em qualquer computador compatível com IBM PC.

O objetivo do método é calcular os valores de $F(\cdot)$ para toda a partição de modo que a entropia seja máxima e por conseguinte, que a informação também seja maximizada.

Além da maximização da entropia contamos com as seguintes restrições:

$$1) P(j, n_j) = - \sum_{e(j, n_j)} F(e(n_1, \dots, n_J/n_j)) \cdot a(e(n_1, \dots, n_j))/A$$

para todo j com n_j variando entre $n_{j\min}$ e $n_{j\max}$

Esta restrição nos diz apenas que se $F(e)$ é a densidade, então, o valor lido da projeção de determinada faixa deve corresponder à soma das densidades ponderadas pela área do elemento. Como a projeção é normalizada, este valor é dividido por A .

$$2) \sum_e F(e(n_1, \dots, n_J)) \cdot a(e(n_1, \dots, n_J)) = A$$

Esta restrição sobre a função $F(e)$ é coerente com a normalização da projeção e apenas restringe os limites da densidade no sentido de garantir valores sempre positivos para entropia.

Usando operadores de Lagrange para a maximização chega-se a seguinte solução:

$$F(j, n_j) = \sum_{e(\dots/mk)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^J F(k, n_k) \cdot a(e(n_1, \dots, n_J))/A \quad (4)$$

onde $F(j, n_j)$ é tal que

$$F(e(n_1, \dots, n_J))/a(e(n_1, \dots, n_J)) = \prod_{k=1}^J F(k, n_k) \quad (5)$$

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA:

A implementação do cálculo da máxima entropia em computador foi realizada em um microcomputador compatível com IBM PC/AT através de dois programas escritos em MS/QuickBASIC. O primeiro programa faz o cálculo da malha com a identificação dos elementos de partição. Já o segundo executa o cálculo iterativo, isto é, o algoritmo da máxima entropia propriamente dito.

CÁLCULO ITERATIVO:

Conhecendo os centróides dos elementos da partição, pode-se, usando mudança de coordenadas, conhecer a que faixas, uma de cada projeção, o elemento pertence. Logo no início, usando a mesma subrotina poligonal descrita no programa anterior é feito o cálculo da área do objeto usando as retas limites calculadas a partir das faixas com projeção igual a zero. Assim, depois de dados valores iniciais a todos $F(j,n_j)$ - atualmente o valor inicial corresponde à solução exata para duas projeções perpendiculares - pode-se dar início ao cálculo iterativo usando a expressão (4).

RESULTADOS E CONCLUSÕES:

É apresentado na figura 2 a evolução do lagrangeano dual, isto é, o lagrangeano cuja variável espacial é substituída como função do operador de Lagrange levando-se em conta as restrições e a condição de maximização. Este cálculo foi incluído no programa iterativo visando a comprovação da convergência do algoritmo. Pode-se observar que para este caso, de oito projeções, a convergência é muito rápida.

Já foram testados, casos simples de quatro, seis e oito projeções com resultados satisfatórios, ainda não foi feita nenhuma filtragem nos resultados para melhor comparação com outros algoritmos, entretanto, um mesmo caso testado em retroconvolução filtrada, usando filtro de realce de contorno, obteve melhores resultados no algoritmo de máxima entropia, apesar que neste a reconstrução foi muito mais demorada.

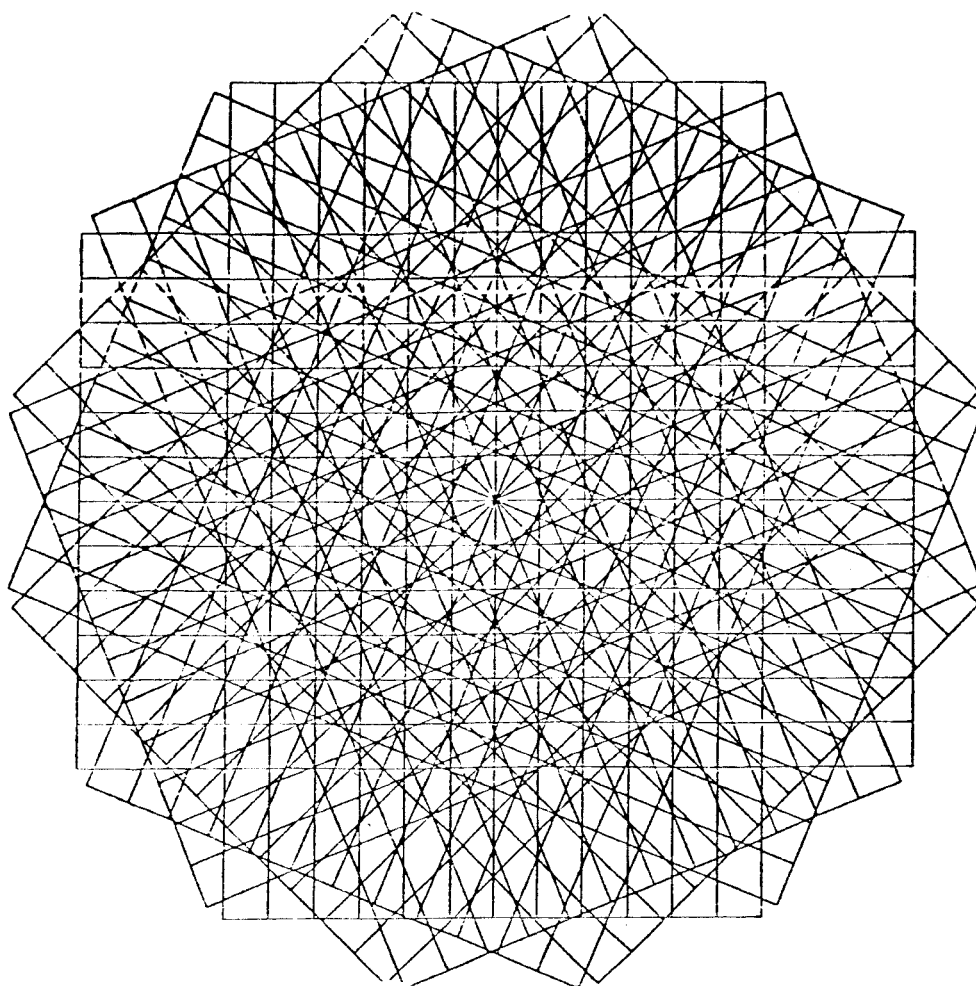


Figura 1

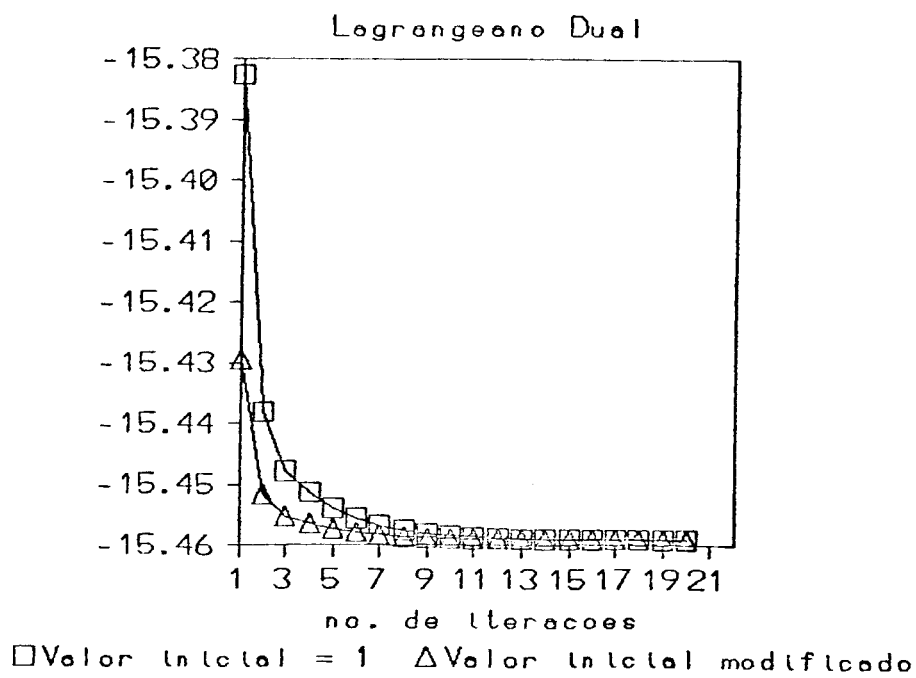
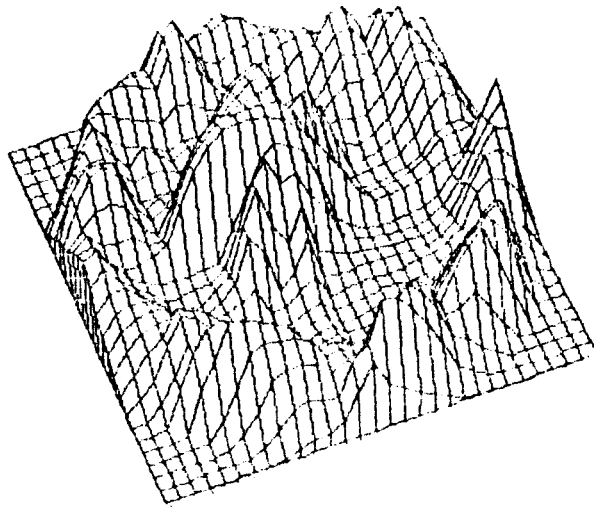


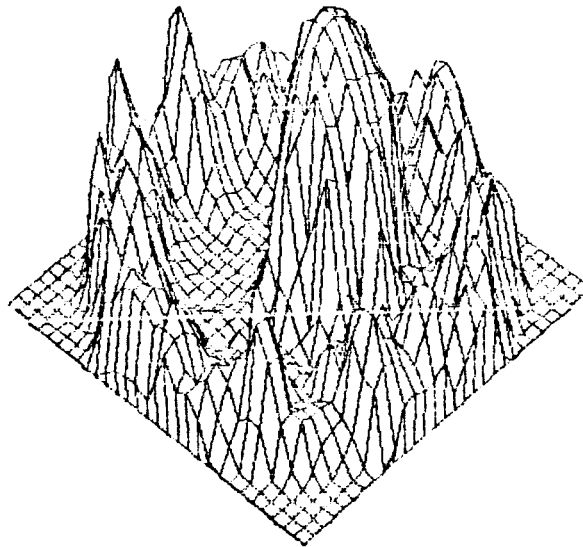
Figura 2



4 PROJEÇÕES . 1 ITERAÇÃO

Reconstrução de um cilindro oco de raio externo 15, espessura 5 e densidade 5. O cilindro interior não centralizado, tem raio 5 e densidade 10.

Figura 3



6 PROJEÇÕES . 1 ITERAÇÃO

Reconstrução de um cilindro oco semelhante ao anterior com um cilindro não centralizado de raio 5 e densidade 14.

Figura 4