

SUAVIZAÇÃO DE POLIGONAIS QUE REPRESENTAM
CURVAS DE NÍVEL DE UMA SUPERFÍCIE:
UM MÉTODO QUE EVITA INTERSECCOES

prof. Antonio Alberto Fernandes de Oliveira
prof. Ronaldo César Marinho Persiano
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
COPPE / Universidade Federal do Rio de Janeiro
C.P. 68511 CEP 20245 Rio de Janeiro RJ

SUMÁRIO:

Neste trabalho se enfoca o problema de obter aproximações das curvas de nível (isopletas) de uma função Z a partir dos valores que ela assume numa nuvem aleatória de pontos do plano. Supõe-se que é adotada a seguinte estratégia clássica para tratar o problema: Faz-se inicialmente uma estimação de Z nos vértices de uma malha regular. A seguir interpola-se linearmente nas arestas dessa malha. Por fim ligando-se pontos obtidos pela interpolação que estejam no mesmo nível e numa mesma cela, obtem-se poligonais de controle para o traçado final de aproximações de isopletas de Z . Mostra-se aqui como obter a partir dessas poligonais de controle, aproximações suaves para as isopletas, de uma forma em que garantidamente, duas aproximações, referentes a isopletas em níveis distintos de Z , não se interceptam de forma alguma. Essa propriedade é bastante incomum no contexto que se está tratando.

I. INTRODUÇÃO:

Inicialmente vamos descrever todo um procedimento clássico de geração de curvas de contorno de uma função Z , a partir dos valores que ela assume em pontos amostrais distribuídos por uma região do plano. Essa descrição visa essencialmente, definir de forma precisa o contexto onde se aplica um método de suavização que vamos introduzir neste trabalho. Por isso não nos preocuparemos em detalhar as operações que não pertençam a etapa de suavização, propriamente dita.

Dentro da estratégia que vamos abordar, o processo todo pode ser dividido em quatro etapas bem diferenciadas, às quais nos referiremos por: Regularização, Interpolação, Encadeamento e finalmente Suavização. Em outras estratégias, deve ser dito, essa divisão não é apropriada.

Por Regularização vamos nos referir ao processo em que Z é estimada nos vértices de uma malha regular G , em geral de cela quadrada ou triangular. No restante do processo os vértices de G , que são uniformemente distribuídos, substituirão os pontos originais cuja distribuição é em geral aleatória. Em seguida podemos estender a estimação de G para toda a região em estudo fazendo uma interpolação em cada cela usando o valor estimado para Z nos quatro vértices que lhe são adjacentes. Numa segunda alternativa, mais simples, limitamos essa extensão às arestas de G utilizando os valores estimados em seus extremos. Em nosso caso assumiremos que é feita apenas uma interpolação linear nas arestas de G .

Mesmo quando se fazem interpolações nas celas, pode ser necessário obter, para cada isopleta que se queira exibir, uma representação que permita que ela possa ser traçada de uma vez só. Esse é o trabalho da etapa de Encadeamento onde se obtem para cada isopleta, uma sequência de pontos de controle em função dos quais, se irá obter seu traçado final. Por exemplo, esse traçado poderá ser o da própria poligonal que liga pontos consecutivos da sequência que representa a isopleta, chamada poligonal de controle da isopleta. Pontos em posições vizinhas dentro dessas sequências devem atender a um critério de proximidade qualquer, costumando-se exigir que eles pertençam a uma mesma cela ou a celas vizinhas.

Numa etapa final a partir da sequência de controle gerada para cada isopleta pelo Encadeamento, procuramos obter uma curva com um grau de diferenciabilidade estabelecido a priori e que em nosso caso suporemos 1. Dito de forma sintética, nessa etapa se efetua a suavização das poligonais

de controle das isopletas.

Quando o encadeamento meramente cola curvas suaves que aproximam uma isopleta em celas vizinhas e que além disso, possuem tangente idêntica no ponto de junção, essa etapa pode, é lógico, ser completamente dispensada. Em nosso caso entretanto, em que as poligonais de controle estão em geral, longe serem suaves, essa etapa é necessária a não ser que se abra mão de qualquer exigência quanto a diferenciabilidade das curvas obtidas.

Na situação que estamos abordando as poligonais de controle de duas isopletas em níveis distintos de Z não se interceptam. O problema é como transmitir essa propriedade às curvas obtidas pela suavização dessas poligonais. Na tentativa de conseguir isso, pode-se lançar mão de ferramental elaborado da teoria de splines obtendo-se aproximações diferenciáveis das poligonais que dela se afastam o mínimo possível. Infelizmente entretanto, não costuma haver nenhuma garantia de que o traçado de duas dessas aproximações obtidas para isopletas em níveis distintos, não se cruzem. A dificuldade toda está em que devemos suavizar uma poligonal de controle usando apenas a informação posicional de seus vértices, sem levar em conta nenhum dado referente ao valor real ou estimado para Z numa vizinhança dessa poligonal. A grosso modo podemos dizer que perdemos uma dimensão, uma vez que os dados que dispomos estão distribuídos ao longo de uma curva e não mais, por uma área do plano.

Essa dificuldade entretanto pode ser contornada, no caso que estamos tratando, com pequenas preocupações adicionais sobre onde fazer a interpolação. O objetivo desse artigo é exatamente mostrar uma forma de fazer isso, apresentando-se um método de suavização que gera aproximações de isopletas em níveis distintos de Z que não se interceptam de maneira alguma. Neste trabalho chamaremos de M_2 a esse método, usando-se M_1 para fazer referência ao algoritmo de Encadeamento ao qual ele está vinculado. Também a propriedade de não intersecção mencionada acima, receberá denominação curta, tantas são as vezes que nos iremos referir a ela no restante do trabalho. Daqui por diante ela será simplesmente a propriedade P_1 . A versão do método que é apresentada é a mais crua possível pois nosso desejo é apenas ressaltar o quanto ele pode ser simples e rápido. As curvas obtidas pelo emprego dessa versão podem portanto, não atender a critérios estéticos ou estatísticos ou de outra qualquer natureza sem que sejam submetidas a procedimentos complementares com os quais não nos preocupamos neste trabalho.

Para encerrar esta introdução, apenas algumas palavras acerca da notação utilizada daqui por diante. Devemos dizer que representamos uma poligonal ou indicando explicitamente a sequência de seus vértices entre $[]$ ou, quando essa sequência é representada de alguma outra forma, colocando essa representação também entre $[]$. O triângulo de vértices a , b e c é notado por $\triangle[a,b,c]$. Além disso, o operador intersecção de conjuntos é escrito \cap e o

interior de um conjunto A é referido por A° . Finalmente, deve-se ainda mencionar que vetores são representados em **negrito**.

II. OS ALGORITMOS M_1 E M_2 .

Por simplicidade neste trabalho representamos sempre por $Z'(x)$ a aproximação obtida para Z em x , não importando se esse valor foi conseguido na etapa inicial de Regularização ou se pela Interpolação. O processo de estimação de um nó v pode ainda concluir que não há elementos suficientes para se fazer uma avaliação em v e atribuir a $Z'(v)$ o valor nulo. A presença desse valor nulo impedirá que seja feita qualquer interpolação em que v deva tomar parte. Uma cela que tem todos os vértices não nulos é dita inteiramente valorada.

Assumindo então que G é uma malha de cela retangular e que nulo é um valor possível para Z' , podemos formular inicialmente, uma primeira hipótese que trará simplificações a apresentação de resultados e algoritmos:

Hipótese H-1:

Se $v_i, i=1,2,3,4$ são os vértices de uma cela então $Z'(v_i) \neq Z'(v_j)$ para $i \neq j$.

Certamente podemos fazer com que essa hipótese seja atendida mediante um simples procedimento de perturbação. Essa é mesmo uma alternativa a prover o algoritmo que faz o encadeamento, dos recursos necessários para que ele possa funcionar devidamente mesmo quando essa hipótese não é verdadeira. O que ocorre é que a existência de arestas inteiras em que o valor de Z' é constante, complica a operação de escolher o próximo ponto durante a construção da sequência de controle de uma isopleta e em consequência, a exposição de resultados de alguma maneira relacionados a essa operação. Caso haja vértices adjacentes com mesmo valor de Z' , certamente essas arestas existirão e como conforme veremos a seguir, podemos ter necessidade de acrescentar a G algumas diagonais de celas, estendemos essa exigência de estarem em níveis distintos de Z' , também para os vértices opostos de uma mesma cela.

A adição de diagonais de celas ao conjunto de arestas da malha G , para que também nelas se faça uma interpolação linear, é necessária para que o método M2 tenha a propriedade P1. Essa adição se dá apenas nos dois casos descritos abaixo, sendo que, no primeiro deles ela já constitui solução usual para evitar a ocorrência de plateaus na aproximação obtida para o gráfico de Z' .

i) Se uma cela C tem todos os vértices valorados e entre eles os dois para os quais o valor de Z' é maior (menor) forem vértices opostos, então uma diagonal qualquer de C deve ser acrescentada a G . Observe que se $E=[x_1, x_2, x_3, x_4]$ é a

envoltória de C , a situação acima só pode ocorrer se tivermos $Z'(x_1) > Z'(x_2) > Z'(x_3) > Z'(x_4) > Z'(x_1)$ ou $Z'(x_1) < Z'(x_2) < Z'(x_3) < Z'(x_4) < Z'(x_1)$. Verificamos assim que podemos detectar se essa condição ocorre fazendo até 4 testes.

ii) Se apenas um dos vértices de uma cela C for nulo, introduza em G a diagonal de C que liga seus vértices valorados que são opostos.

Tendo em vista a hipótese H-1 e i e ii acima, podemos enunciar o lema dado a seguir, que engloba um conjunto de fatos relativos ao comportamento da aproximação Z' na envoltória de uma cela C .

LEMA 1:

Se E é a envoltória de uma cela C e m e M respectivamente, os valores máximo e mínimo de Z' entre os vértices de C , então é verdade que:

- I) m e M são atingidos por Z' em um único ponto de E .
- II) Se C é inteiramente valorada e c está no intervalo (m, M) então existem exatamente dois pontos satisfazendo $Z'(x) = c$.
- III) Se $c \in (m, M)$ e um ponto x de uma aresta a de C é a única solução em E para $Z'(z) = c$ então a será a única aresta de C com dois vértices valorados.
- IV) Se C é inteiramente valorada e c está em (m, M) então, seja s o segmento ligando os dois pontos de E que estão no nível c . A existência desses dois pontos está garantida pelo item II. Considerando então, dois níveis distintos c_1 e c_2 em (m, M) temos que necessariamente, s_{c_1} e s_{c_2} são disjuntos. #

A prova desse lema, bem como dos demais que são apresentados neste trabalho pode ser encontrada em OLIVEIRA [1988].

Introduzimos agora o procedimento M_1 cuja finalidade é obter a sequência de controle de uma isopleta que passa por um ponto x , daqui por diante referida por $M_1(x)$. O item II do LEMA 1 facilita bastante o trabalho de obter essa sequência que pode então, ser gerada pelo uso reiterado do procedimento básico dado a seguir. Esse procedimento é apresentado de uma forma que procura apenas destacar, como deve ser tratado o problema de estender $M_1(x)$ a partir de certos vértices da grade G . A maneira como isso é feito é importante para que a versão de M_2 que será introduzida possua, de fato, a propriedade P_1 . Essa apresentação, portanto, não se constitui em alguma coisa próxima da implementação, mas tal não é também sua finalidade. Seja então x_i o último ponto obtido

para a sequência $M_1(x)$. A ele, vamos considerar associados, uma aresta a_i a qual ele deve pertencer, e uma cela C_i contendo essa aresta.

Se C_i é uma cela inteiramente valorada e $x_i > 1$, não repete o ponto inicial da sequência, então, a partir de (x_i, a_i, C_i) o procedimento determina $(x_{i+1}, a_{i+1}, C_{i+1})$ da forma dada a seguir. Caso as condições acima não se cumpram, a maneira como ele procede é a comumente empregada por métodos similares diante de tais situações e por isso não será discutida aqui.

" Se x_i não é um vértice, que seja ponto de máximo ou de mínimo de Z' na envoltória de C_i , faça x_{i+1} ser o outro ponto dessa envoltória no mesmo nível de Z' que x_i . Faça ainda a_{i+1} ser uma aresta de C_i contendo x_{i+1} . C_{i+1} será a outra cela que contem a_{i+1} . Caso contrário faça $x_{i+1} = x_i$, a_{i+1} a outra aresta de C_i , diferente de a_i , contendo x_{i+1} e determine C_{i+1} como no caso anterior." Podemos observar que a_{i+1} só precisa ser considerada nesse último caso, servindo então, para identificar a cela C_{i+1} , evitando que ela seja repetida em C_i e a partir daí reproduzamos, na ordem inversa o trecho da sequência $M_1(x)$ já determinado, uma vez que não identificamos a repetição de pontos além do inicial. Observe ainda com relação a esse último caso, que ele dá origem a existência de termos repetidos em $M_1(x)$. Essa repetição entretanto, será necessária para que a versão de M_2 que será dada satisfaça P_1 .

O item IV do LEMA 1 assegura que se x_1 e x_2 estão em níveis distintos de Z' então as poligonais $[M_1(x_1)]$ e $[M_1(x_2)]$ não se cruzarão. No restante deste trabalho vamos supor que as sequências de controle são determinadas pelo procedimento dado acima.

Para apresentar o método de suavização M_2 falta apenas introduzir a família das funções $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ que possuem as seguintes propriedades:

I) $g(0) = 1, g(1) = 0$.
 II) g é convexa, o que junto com (a) implica que ela é não-crescente e continua e ainda que $g(t) + g(1-t) \leq 1$.
 III) g é continuamente diferenciável.

IV) $g'(1) = 0$.
 V) $g(.5) > 0$, o que garante que $g(t)$ e $g(1-t)$ não podem ser simultaneamente nulas.

Exemplos dessas funções: $(1-t)^n, n=1,2,\dots$ e $1 - \log((e-1)t+1)$.

Dada agora uma dessas funções g e tres pontos do plano (a,b,c) defina a curva $D[a,b,c]$ como sendo o conjunto de pontos do plano que podem ser obtidos pela expressão

$$b + g(t) \cdot (a-b) + g(1-t) \cdot (c-b)$$

com t variando em $[0,1]$.

As propriedades III e V garantem que as curvas D são diferenciáveis. A propriedade I assegura que $D[a,b,c]$ passa por a e c e a IV que esses pontos são atingidos com tangente dada pela direção de $a-b$ e $c-b$, respectivamente.

Finalmente a condição II é fundamental para que as curvas D atendam a propriedade expressa pelo LEMA 2 dado a seguir. É exatamente essa propriedade que vai permitir ao método M2 gerar curvas que não se interceptam quando representam isopletas em níveis distintos.

LEMA 2:

Suponha que a, b, c, a', b' e c' são pontos do plano tais que existe uma transformação linear L satisfazendo a:

$$a' = L(a), b' = L(b), c' = L(c) \text{ e}$$

$$\forall p \in [a, b, c] \quad L(p) \in T[a,p,c] \cup T[c,p,b] \text{ e}$$

$$p \in T[a',L(p),c'] \cup T[c',L(p),b'].$$

Então $\forall g$ da forma dada acima será verdade que:

$$D[a,b,c] \cap D[a',b',c'] = \emptyset. \quad \#$$

A FIGURA 1 contribui para que se entenda melhor o enunciado deste lema.

Passamos finalmente a descrever uma versão simples de M2. Numa primeira etapa se calcula uma função g com as propriedades I-V descritas acima, numa sequência de pontos do intervalo $[0,1]$ da forma $(j/m, j=1, \dots, m-1)$. O número de termos dessa sequência (m) é estabelecido de acordo com a precisão desejada. Esse cálculo não precisa mais ser repetido no restante do processo. Dada então uma poligonal $P = [p_i, i=1, \dots, n]$, determinam-se, repetindo vértices apropriados

de P , os pontos p_0 e/ou p_{n+1} . Essa determinação deve ser feita de modo a garantir que se P é fechada, o mesmo se dê com $M2(P)$ e no caso de P ser aberta, seus extremos sejam preservados. Não vamos discutir como especificamente, ela é efetuada por considerarmos que isso não traz nenhuma novidade e nem chega a ser importante para os propósitos deste trabalho. Feito isso executa-se para i de 1 até n , ou $n-1$ no caso de P ser fechada, o procedimento básico dado a seguir, que é bem trivial. "Calcula-se r_i e s_i , vetores que são

respectivamente, a metade de $p_{i-1} - p_i$ e $p_{i+1} - p_i$. Então, para uma sequência de pares da forma $(j/m, (m-j)/m), j=0, k, 2k, \dots, m$; onde k é dependente do comprimento desses dois vetores e da precisão desejada, determina-se $p_i + g(j/m) \cdot r_i + g((m-j)/m) \cdot s_i$.

Representando-se por q_i o ponto médio do segmento $[p_i, p_{i+1}]$, então os pontos obtidos estão sobre a curva $D[q_{i-1}, p_i, q_i]$ que pelo que já vimos é diferenciável, e atinge q_{i-1} e q_i . Além disso, ela tem nesses pontos tangente paralela aos segmentos $[p_{i-1}, p_i]$ e $[p_i, p_{i+1}]$. Isso, obviamente, se esses

segmentos forem não degenerados. Assim se $p_i \neq p_{i+1}$, a união das curvas

$D[g_{i-1}, p_i, q_i]$ e $D[g_i, p_{i+1}, q_{i+1}]$ continuará a ser diferenciável devido a tangente comum em q_i . Se entretanto $p_i = p_{i+1}$ pode ser que tal não aconteça. O que ocorre é que nesse caso, $D[g_{i-1}, p_i, q_i] = [q_{i-1}, p_i]$ enquanto $D[g_i, p_{i+1}, q_{i+1}] = [p_{i+1}, q_{i+1}]$ e esses dois segmentos podem, é claro, ter direções distintas. Quando os unimos há portanto, uma mudança brusca de orientação em $q_i = p_{i+1}$. Conforme vimos

as sequências $M_1(x)$ podem apresentar elementos repetidos e de fato, essa repetição pode ter de ser mantida para que M_2 possua a propriedade P_1 . A repetição de termos de $M_1(x)$ entretanto, só poderá se dar num vértice de G que seja um ponto de máximo ou mínimo de Z em alguma cela. A obtenção de uma aproximação suave para $[M_1(x)]$ quando ela apresenta vértices repetidos, sem que se viole a propriedade P_1 , exigirá providências que não apresentaremos aqui.

Assim verificamos que M_2 não é mais que um método clássico de síntese de curvas onde as blending functions tem suporte pequeno. Dentro dessa interpretação, em particular,

deve ser notado que se, por exemplo, $g(t) = (1-t)^2$, então a curva obtida por M_2 para uma poligonal P , será a mesma determinada ponderando-se os vértices de P por B-splines quadráticas. Passamos agora ao estudo da propriedade mais interessante de M_2 .

III. M_2 POSSUI A PROPRIEDADE P_1 .

Esta seção se dedica inteiramente a mostrar que as curvas geradas por M_2 atendem a propriedade P_1 . O trabalho está dividido em duas partes (Teoremas 1 e 2). Em ambas se demonstra que curvas elementares da forma $D[g_i, p_i, q_i]$

empregadas por M_2 , não se cruzam quando forem obtidas utilizando como "p's" pontos em níveis distintos de Z' . Na

primeira parte esses pontos são assumidos não pertencerem a uma mesma aresta, enquanto na segunda se supõe exatamente o contrário, necessitando-se então do LEMA 2 para obter o resultado mencionado acima. Para poder iniciar qualquer das partes entretanto, é preciso definir uma série de elementos, tarefa a que nos propomos agora. A FIGURA 2 ajuda a identificar alguns desses elementos.

Assim, dados h em $[0, 1)$ e $a = [v_1, v_2]$, a aresta comum às celas C e C' , defina $P(h, a, C)$ como sendo o conjunto dos pontos y satisfazendo a:

- i) $x \in a$.
- ii) $y = x + h(z-x)$, onde $[x, z] = [M_1(x)] \cap C$, ou seja $[x, y]$ é a porção adjacente a a do segmento $[M_1(x)] \cap C$, de tamanho determinado por h .

Seja então $K(h, a, C) = \text{co}(P(h, a, C) \cup C')$.

Suponha agora que C é uma cela inteiramente valorada e defina os segmentos $s_i(h, a, C)$, associados aos vértices v_i de a , da forma dada a seguir. Assuma que $b_i = [w_i, v_i]$ é a outra aresta de C adjacente a v_i .

- i) Se $v_i, i=1, 2$ é um ponto de máximo ou de mínimo para Z' entre os vértices de C , então, faça $s_i(h, a, C) = [v_i, u_i + h(t -$

u_i], onde u_i e t_i são definidos da seguinte maneira:

i.1) Se existe $x \in a$ tal que $Z'(w_i) = Z'(x)$ então faça:

$$u_i = x \quad \text{e} \quad t_i = w_i$$

i.2) Caso contrário existe $z \in b_i$ tal que $Z'(z) =$

$Z'(v_{3-i})$ devendo-se fazer então:

$$u_i = v_{3-i} \quad \text{e} \quad t_i = z$$

ii) Se $v_i \in (1,2)$ não é um ponto extremo para Z' em C então faça simplesmente $s_i(h,a,C) = [M_1(v_i)] \setminus C$, independentemente portanto de h .

Faça ainda $r_i(h,a,C)$ ser a reta suporte de $s_i(h,a,C)$, $i=1,2$; e defina adicionalmente $r_3(h,a,C)$ como sendo a paralela a aresta a traçada por $v_i + h(w_i - v_i)$, $i=1,2$. A definição de $r_3(h,a,C)$ independe de i .

Represente por $R_k(h,a,C)$, $k=1,2,3$ o conjunto dos pontos que estão do mesmo lado que a em relação a $r_k(h,a,C)$, incluindo essa própria reta. Finalmente faça $R(h,a,C) = \bigcap_{i=1}^3 R_i(h,a,C)$.

Definidos todos esses elementos podemos enunciar o lema abaixo que congrega nos seus 4 itens, os resultados que utilizaremos posteriormente para mostrar que as curvas geradas pelo método M2 atendem a propriedade P1.

LEMA 3:

- I) $K(h,a,C) \subset R(h,a,C)$.
 II) Se z está numa aresta oposta a a então $y \in r_3(h,a,C)$.
 III) Se z está numa aresta b_i adjacente a a então $y \in s_i(h,a,C)$, $i \in \{1,2\}$.
 IV) Se $y \neq v_i$, $i=1,2$ então $y \in C$. #

Deve-se dizer com relação ao item I que se pode mesmo mostrar que $K(h,a,C) \setminus C = R(h,a,C) \setminus C$, sendo entretanto o resultado expresso nesse item mais que suficiente para nossos propósitos.

Com base no lema acima podemos enunciar o TEOREMA 1 abaixo:

TEOREMA 1:

Sejam :

- i) x_1 e x_2 dois pontos associados por M_1 a arestas distintas a_1 e a_2 e que estão em níveis diferentes de Z' .
 ii) C_{ij} , $j=1,2$ as celas adjacentes a a_i , $i=1,2$.
 iii) z_{ij} tal que $[z_{ij}, x_i] = [M_1(x_i)] \setminus C_{ij}$, $i=1,2, j=1,2$.
 iv) y_{ij} , o ponto médio do segmento $[x_i, z_{ij}]$, $i=1,2, j=1,2$.
 v) $T_i = T[y_{i1}, x_i, y_{i2}]$ e $d_i = D[y_{i1}, x_i, y_{i2}]$, $i=1,2$.

Nessas condições temos que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ e em consequência $d_1 \cap d_2 = \emptyset$, já que $d_i \subset T_i, i=1,2$.

Esquema da Prova:
O caso em que nenhuma cela contém simultaneamente a_1 e a_2 é de simples comprovação e não será abordado aqui.

Considere então que a_1 e a_2 tem uma cela em comum. Sem perda de generalidade podemos assumir que essa cela é $C_{11} = C_{21}$, no restante desta prova referido apenas por C_1 .

Observe então que, para $i=1,2$, y_{i1} está em $P(.5, a_i, C_i)$ e tanto x_i como y_{i2} estão em C_{i2} . Assim temos que, y_{i1}, x_i e y_{i2} estão em $\text{co}(P(.5, a_i, C_i), C_{i2}) \subset R(.5, a_i, C_i)$. Devido à convexidade desse último conjunto verificamos então, que

$$T_i \subset R(.5, a_i, C_i), i=1,2. \quad (I)$$

Defina agora a reta r_{12} da seguinte forma:

A) Se a_1 e a_2 são arestas opostas de C_1 então faça r_{12} ser a reta paralela às a_i passando pelo centro de C_1 e que é exatamente $r(.5, a_i, C_1)$ para qualquer das a_i .

B) a_1 e a_2 são arestas adjacentes no vértice $v = v_k(a_1) = v_k(a_2), k, l \in \{1,2\}$. Nesse caso faça $r_{12} = r_k(.5, a_1, C_1) = r_l(.5, a_2, C_1)$.

Pela própria definição de $R(h, a, C)$ podemos constatar que em qualquer caso, r_{12} separa os conjuntos $R(.5, a_i, C_i), i=1,2$. Assim por I temos que

$$T_1 \cap T_2 \subset r_{12}. \quad (II)$$

Mostramos em seguida que:

$$T_i \cap r_{12} \subset [y_{i1}, x_i]. \quad (III)$$

Juntando agora II e III temos por fim, que se x_1 e x_2 não estão no mesmo nível então,

$$T_1 \cap T_2 \subset [y_{11}, x_1] \cap [y_{21}, x_2] \subset [M_1(x_1)] \cap [M_1(x_2)] = \emptyset, \quad \#$$

completando a prova. Alguns elementos referidos nesta prova estão representados na FIGURA 3.

O teorema dado abaixo complementa o conjunto de resultados necessários para mostrar que M_2 possui a propriedade P_1 .

TEOREMA 2:

Sejam:

i) x_1 e x_2 dois pontos distintos associados por M_1 a uma mesma aresta $a = [v_1, v_2]$ que separa as celas C_1 e C_2 .

iii) z_{ij} tal que $[z_{ij}, x_i] = [M_1(x_i)] \cap C_{ij}, i=1,2, j=1,2$.

iii) y_{ij} , o ponto médio do segmento $[x_i, z_j]$,
 $i=1,2, j=1,2$.
 iv) $d = D[y_{11}, x_1, y_{12}]$, $i=1,2$;
 Nesse caso é verdade que: $d_1 \wedge d_2 = \emptyset$

Esquema da Prova:

Inicialmente tratamos a parte, casos triviais em que ambos os ternos (y_{i1}, x_i, y_{i2}) , $i=1,2$ tem os 3 elementos colineares. Nesses casos as d_i se reduzem a segmentos que estão contidos em $[M_1(x_i)]$, $i=1,2$; e como essas poligonais são disjuntas podemos encerrar a prova. Para os casos restantes efetuamos o seguinte procedimento:

Substituímos no resultado expresso no LEMA 2 os ternos (a,b,c) e (a',b',c') por (y_{11}, x_1, y_{12}) e (y_{21}, x_2, y_{22}) , respectivamente. Se os elementos desses dois últimos ternos forem não colineares haverá na expressão obtida uma completa equivalência de papéis entre x_1 e x_2 , y_{1j} e y_{2j} , $j=1,2$; e entre y_{i1} e y_{i2} , $i=1,2$. Prevalecendo-nos então desse fato e, para tratar o caso em que ainda temos um desses ternos com elementos colineares, novamente de que as $[M_1(x_i)]$, $i=1,2$; não se cruzam, podemos reduzir o objeto dessa prova à afirmação:

Para qualquer h em $[0, .5]$,

$y'_{21} = x_2 + h(z_{21} - x_2) \notin T = T[y'_{11} = x_1 + h(z_{11} - x_1), x_1, y'_{12}]$.

Para constatar que essa afirmação é verdadeira comece observando os 3 seguintes fatos:

F1) Pelo item I do LEMA 2 temos:

$T \subset K(h, a, C) \subset R(h, a, C)$

F2) Pelos itens II e III desse mesmo lema y'_{21} está em $r_i(h, a, C)$ para algum i em $\{1,2,3\}$ e por conseguinte y'_{21} não se encontra em $R(h, a, C)$.

F3) y'_{21} não está em $[x_1, y'_{11}]$ contido em $[M_1(x_1)]$, por estar em $[M_1(x_2)]$.

Como nos casos que estamos ainda considerando, podemos sempre assumir que y_{11}, x_1 e y_{12} não estão alinhados, temos que obrigatoriamente, $y_{12} \neq v^k$, $k=1,2$.

Nesse caso, pelo item IV do LEMA 2 y_{12} está em $C_2^0 \subset R(h, a, C)$.

Por F1 verificamos então, que devido a convexidade dos conjuntos envolvidos, temos que:

$T/[x_1, y_{11}] \subset R(h, a, C_1)$ ou seja $T \subset [x_1, y_{11}] \cup R(h, a, C_1)$.

Como por F2 e F3, y'_{21} não pode estar em nenhum dos conjuntos que compõem essa união, ele não pode logicamente estar em T , completando-se a prova. #

Podemos agora apresentar o resultado a que se propõe essa seção e que é uma consequência imediata dos dois teoremas acima.

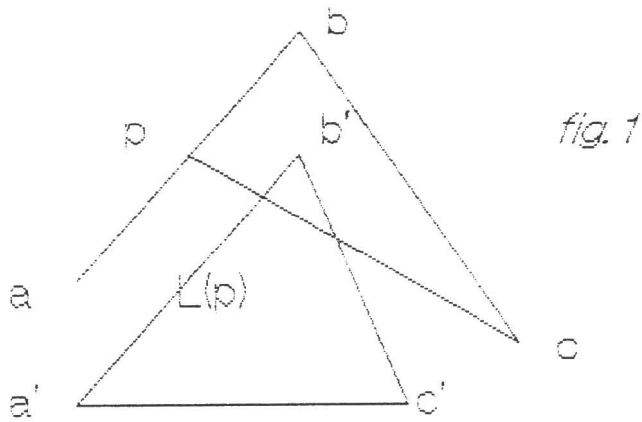


fig. 1

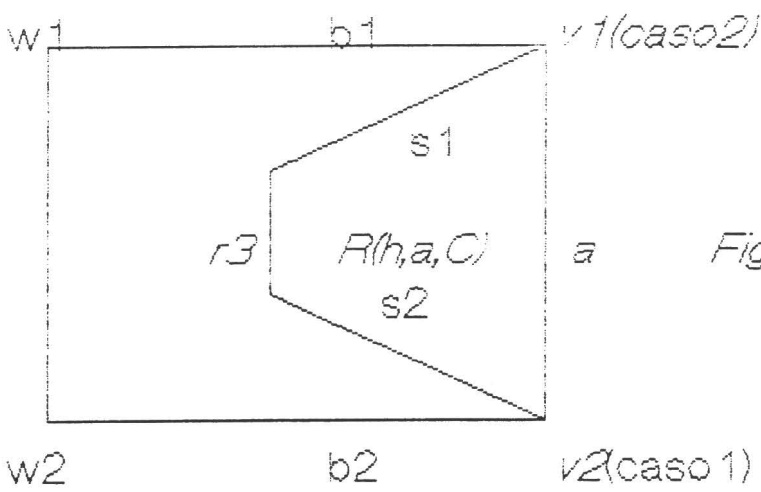


Fig. 2

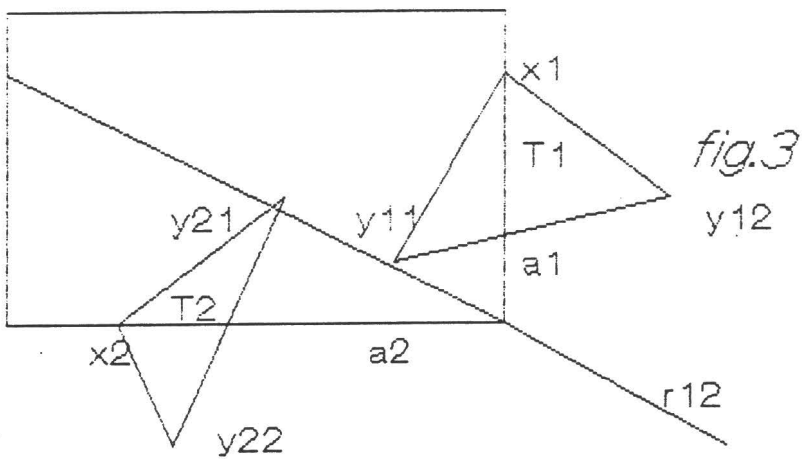


fig. 3

COROLARIO:

Sejam x'_1 e x'_2 dois pontos de G em níveis distintos de Z' . Nesse caso, $M_2(x'_1) \cap M_2(x'_2) = \emptyset$.

Esquema da Prova:

Abordaremos aqui apenas o caso em que $M_1(x'_i)$ não possui elementos repetidos e portanto a cada ponto dessas seqüências é associado por M_1 a uma única aresta. A extensão para o caso geral requer apenas, que no desenvolvimento a seguir façamos a associação de uma aresta, não a um ponto, mas a um termo de uma das seqüências $M_1(x'_i), i=1,2$.

Suponha então que existe um ponto p que pertença simultaneamente a $M_2(x'_1)$ e $M_2(x'_2)$. Seja então x_{1k} um ponto de $M_1(x'_1)$ tal que

$$p \in D \left[\left(x_{1(k-1)} + x_{1k} \right) / 2, x_{1k}, \left(x_{1k} + x_{1(k+1)} \right) / 2 \right].$$

Represente por a_{1k} a aresta associada a x_{1k} por M_1 e defina x_{2m} em $[M_1(x'_2)]$ e a_{2m} de forma análoga a x_{1k} e a_{1k} , respectivamente.

Pelo resultado do TEOREMA 1 as arestas a_{1k} e a_{2m} não podem ser diferentes e pelo TEOREMA 2 elas não podem também ser iguais. Gera-se assim uma situação de impossibilidade que mostra que não pode haver um ponto como p , encerrando a prova. #

IV. CONCLUSÕES.

Fazendo um rápido apanhado acerca das vantagens e desvantagens da versão de M_2 dada, diríamos que ele é certamente simples de implementar e que, supondo uma precisão fixa, seu tempo de execução é linear no número de vértices da poligonal que constitui sua entrada. É o fato de possuir a propriedade P_1 que o torna interessante, devendo-se notar ainda que ele possibilita que sejam efetuadas variações locais na medida que, pelo TEOREMA 1, podemos ter uma função g diferente para cada aresta, sem degradar a propriedade P_1 .

As desvantagens são de diferentes naturezas, muitas delas comuns a métodos similares largamente usados. Citariamos apenas, para encerrar este trabalho, que M_2 não interpola os pontos de $M_1(x)$, que quando essa seqüência tem termos repetidos $M_2(x)$ pode perder a diferenciabilidade, embora isso possa ser contornado de uma forma não discutida aqui, e finalmente que as curvas geradas por M_2 não são isopletas de nenhuma função diferenciável definida na região do plano em estudo.

BIBLIOGRAFIA.

- CHERENACK, P.; Conditions for Cubic-Spline Interpolation on Triangular Elements. Comp. & Maths. Vol. 10, No. 3, pp 235-244, 1984.
- DIERCKX, P.; Computation of Least-Squares Spline Approximations To Data Over Incomplete Grids. Comp. & Maths. Vol. 10, No. 3, pp 283-289, 1984.
- OLIVEIRA, A.A.F. & PERSIANO, R.C.M.; Uma Metodologia Para Suavização de Poligonais Representando Curvas de Nível de uma Função do Plano. Relatório Técnico do Programa de Engenharia de Sistemas da COPPE/UFRJ, 1988.