

Compressão de Imagens usando Transformada Wavelet e Curva de Peano-Hilbert

LUÍS FERNANDO DE OLIVEIRA¹
ANTÔNIO A. F. DE OLIVEIRA²
CLÁUDIO ESPERANÇA²

¹Laboratório de Instrumentação Nuclear - PEN/COPPE

²Laboratório de Computação Gráfica - PESC/COPPE

Universidade Federal do Rio de Janeiro Cidade Universitária, Ilha do Fundão, Brasil

luis@lin.ufrj.br
{oliveira, esperanza}@lcg.ufrj.br

Abstract. In this paper, we present a different way to apply the wavelet transform to images. It consists on an image conversion into a vector form by an enumeration process, where pixels are traversed in a continue, unique ordered way, so we can apply a unidimensional wavelet transform over the generated vector. The direction to be followed is obtained by Peano-Hilbert curve which fractal nature overcomes directionality problems commons to classic bidimensional wavelet transform methods. At last, the generated wavelet coefficients are compressed using classification methods from JPEG's algorithm.

Keywords: wavelet transform, Peano-Hilbert curve, image compression.

1. Introdução

Atualmente existe uma grande variedade de métodos de compressão com perdas de imagens digitais e uma vasta literatura sobre o tema [Rab91] [Cla95] [Say96]. Cada método procura explorar uma determinada característica da imagem, manipulando-a de forma a alcançar uma alta taxa de compressão com menor perda possível de qualidade visual. Estes métodos são geralmente compostos por três etapas: decomposição ou transformação, quantização e codificação dos dados.

A decomposição e a transformada são aplicadas às imagens com o intuito de descorrelacionar os dados. Exemplos de transformadas normalmente usadas são: transformada de Haar, Hadamar, cosseno e Fourier. A decomposição de uma imagem é obtida através de sucessivas filtragens. Seu objetivo é quebrar a imagem original em várias bandas sendo que cada banda corresponde a uma determinada faixa de frequência. Exemplos de esquemas de decomposição conhecidos são: *Subband Coding* [Smi84] [Vet95] (ou codificação de bandas) e *Hierarquical Coding* [Bur83] (codificação hierárquica ou piramidal).

Um outro tipo de decomposição pode ser obtido através do partilhamento da imagem em sub-regiões, como em *Block Truncation Coding* [Del79] [Del91] (codificação por truncamento de blocos) ou *Quadtree Based Coding* [Wil90] (codificação por árvore quaternária). Misturando ambas características de decomposição e transformada, está a transformada wavelet [Ant92] [Der94] [Hil94].

Na etapa de quantização, dois tipos diferentes podem ser aplicados: a quantização escalar ou quantização vetorial. A quantização escalar está baseada nas características estatísticas dos dados de entrada sendo cada elemento deste conjunto quantificado isoladamente. A quantização vetorial não considera cada elemento isoladamente, mas os agrupa em pequenos vetores e, através de um levantamento estatístico, determina quais vetores de dados são mais apropriados para forma a base da quantização. Por fim, a codificação pode estar baseada na aplicação de duas técnicas: código de Huffman ou codificação aritmética.

O uso da transformada wavelet é motivada pela possibilidade de representar a imagem original em diferentes resoluções, característica importante para as aplicações de transmissão progressiva e compressão de imagens. No caso da compressão, a transformada wavelet se apresenta também como uma ferramenta bastante útil dado que, através da representação em multi-escala, é possível controlar que porções da imagem serão mais ou menos afetadas pelo processo.

A eficiência dos métodos de compressão por transformada wavelet está fortemente ligada à qualidade dos filtros de análise e síntese. Dentre os filtros mais utilizados destacam-se os filtros desenvolvidos em [Est77] [Str81] [Vai85] [Bat87] [Dau88] [Lem88] e outros. Entretanto, uma vez que se dispõe de filtros de excelente qualidade, a eficiência dos métodos recai sobre as fases de quantização/codificação. Normalmente, nestas fases, os coeficientes da imagem transformada sofrem algum tipo de perda, seja devido a quantização, seja por con-

versão de representação numérica. Os erros introduzidos são responsáveis pelo surgimento de artefatos na imagem reconstruída e conseqüente deterioração da qualidade. A redução do efeito desses erros exige esforço e criatividade, sendo que o resultado final deve ainda apresentar alta taxa de compressão.

Outro ponto determinante nos métodos de compressão usando wavelets é a forma como os coeficiente da imagem serão percorridos. Diferente da imagem obtida pela transformada cosseno, o resultado da transformada wavelet não apresenta uma organização natural que favoreça a escolha de uma determinada trajetória – no caso da transformada cosseno, uma trajetória em zig-zag. Portanto, uma escolha ajustada do percurso a ser seguido é imprescindível.

Neste trabalho, apresentamos um método de compressão baseado em transformada wavelet. Associado ao método, usamos o expediente de percorrer os elementos da imagem segundo uma trajetória não convencional, chamada curva de Peano-Hilbert. Desta forma, nós não somente minimizamos visualmente os efeitos da quantização/conversão de representação, como também capturamos parte da correlação entre os mesmos elementos, convertendo a imagem em um vetor cuja organização é mais adequada à etapa de codificação. Este artigo está organizado em cinco seções além desta introdução. A seção II resume a teoria sobre transformada wavelet, segundo o conceito de multiresolução, e sua relação com banco de filtros. Abordamos, também, sua extensão para duas dimensões e as formas de se calcular a transformada bidimensional. Na seção III, apresentamos a técnica utilizada para obter a quantização e codificação dos coeficientes da transformada e o problema decorrente desta escolha. A seção IV introduz a curva de Peano-Hilbert no contexto da compressão de imagens traçando um paralelo entre os problemas encontrados em dithering e na etapa de quantização citada na seção anterior. A seção V apresenta o método de compressão por completo, somando à transformada wavelet a técnica de quantização, a curva de Peano-Hilbert e a codificação. Além destas, introduzimos nesta seção a possibilidade de conversão do sistema de representação de cores da imagem de entrada YC_bC_r . Encerrando o artigo, a seção VI traz os resultados obtidos pelo nosso método e nossas conclusões.

2. Transformada Wavelet

Através do conceito de análise em multiresolução, criado por [Mal89] e amplamente difundido [Ans91] [Dau90] [Der94] [Dew97] [Hil94] [Swe94] [Vet94], podemos construir famílias de wavelets discretas e desenvolver algoritmos rápidos para o cálculo da transformada. A análise em multiresolução parte da existência de duas funções básicas, uma função wavelet mãe $\psi(t)$ e uma função de escala mãe $\varphi(t)$, ortogonais entre si e tais

que, ao longo dos diversos níveis de resolução, as diversas funções de escala $\varphi_{m,n}(t)$ e wavelet $\psi_{m,n}(t)$ estão relacionadas às respectivas funções mãe por meio das seguintes equações:

$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \varphi(2^m t - n) \quad \psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^m t - n)$$

A relação entre os níveis de resolução pode ser descrita sob a forma de uma seqüência de espaços de função encaixantes, onde cada espaço de maior resolução contém os espaços de menor resolução como expresso abaixo

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

Cada espaço V_m é coberto pela família de funções de base $\varphi_{m,n}(t)$ correspondente. As funções wavelet $\psi_{m,n}(t)$ estão contidas nos espaços W_m , sendo cada espaço W_m o complemento ortogonal de V_m em relação ao espaço V_{m+1} . Desta forma, escrevemos a relação entre dois níveis adjacentes de resolução como

$$V_{m+1} = V_m \oplus W_m,$$

onde o símbolo \oplus representa a operação de soma direta. Uma vez que V_m e W_m estão contidos em V_{m+1} , então ambos os conjuntos de funções de base podem ser expressos como combinação linear das funções de base de V_{m+1} , sendo cada uma delas ponderada pelos coeficientes $h_0[n]$ e $h_1[n]$. Portanto

$$\varphi_{m,n}(t) = \sum_k h_0[k - 2n] \cdot \varphi_{m+1,k}(t), \quad (1)$$

$$\psi_{m,n}(t) = \sum_k h_1[k - 2n] \cdot \varphi_{m+1,k}(t). \quad (2)$$

Estando a função f contida no espaço V_{m+1} , então f pode ser expressa como combinação linear das funções de base $\varphi_{m+1,n}(t)$. De forma similar, projetando f em V_m e W_m e escrevendo estas projeções em função das bases de V_m e W_m , é possível relacionar as projeções de f e os diversos níveis de refinamento da seguinte forma:

$$a_{m+1,k} = \langle f, \varphi_{m+1,k} \rangle \quad a_{m,n} = \langle f, \varphi_{m,n} \rangle$$

$$c_{m-1,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle.$$

Aplicando (1) e (2) nas equações acima, obtemos:

$$a_{m,n} = \langle f, \varphi_{m,n} \rangle = \sum_k h_0[k - 2n] \cdot \langle f, \varphi_{m+1,k} \rangle$$

$$= \sum_k h_0[k - 2n] \cdot a_{m+1,k}$$

$$c_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = \sum_k h_1[k - 2n] \cdot \langle f, \varphi_{m+1,k} \rangle$$

$$= \sum_k h_1[k - 2n] \cdot a_{m+1,k}$$

e dado que V_{m+1} é a soma direta dos espaços V_m e W_m , então, então podemos expressar a base de V_{m+1} como combinação linear das bases de V_m e W_m onde cada uma delas está ponderada pelos coeficientes $g_0[n]$ e $g_1[n]$:

$$\varphi_{m+1,k}(t) = \sum_n g_0[k-2n] \cdot \varphi_{m,n}(t) + \sum_n g_1[k-2n] \cdot \psi_{m,n}(t) \quad (3)$$

Usando (3), podemos expressar $a_{m+1,k}$ como função das projeções $a_{m,n}$ e $c_{m,n}$.

$$a_{m+1,k} = \sum_n g_0[k-2n] \cdot a_{m,n} + \sum_n g_1[k-2n] \cdot c_{m,n}$$

Os processos de síntese (composição) e análise (decomposição) descritos acima podem ser entendidos como a aplicação de filtros passa-baixas e passa-altas seguidos de uma subamostragem (se na análise) ou precedidos por uma superamostragem (se na síntese) – como nos métodos de codificação de bandas (*subband coding*), onde os conjuntos $\{h_0[n], h_1[n]\}$ e $\{g_0[n], g_1[n]\}$ formam os bancos de filtros utilizados por estes métodos. Eles correspondem aos bancos de filtros de análise e de síntese respectivamente. Todas as expressões apresentadas até aqui sugerem uma recursão, onde a projeção de f sobre V_m é decomposta em V_{m-1} , a projeção em V_{m-1} é decomposta sobre V_{m-2} , e assim por diante. Cada projeção equivale a uma versão menos refinada da projeção anterior.

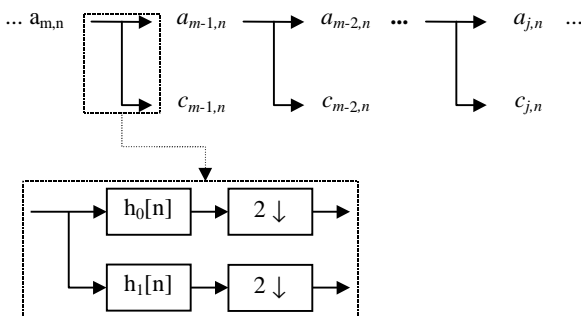


Fig. 1 - Processo de análise composto pela repetição do banco de filtro $\{h_0[n], h_1[n]\}$.

Uma vez que as projeções nos espaços V_m e W_m são ortogonais entre si e complementares em relação ao espaço V_{m+1} , a reconstrução da função original através do processo de síntese é perfeita – isto se não houver perdas entre a decomposição e a reconstrução.

A transformada wavelet bidimensional de uma imagem é obtida aplicando-se a transformada unidimensional primeiro às colunas da imagem e depois sobre as linhas. Isto é possível uma vez que a transformada wavelet é uma transformação unitária, e sendo assim, a transformada bidimensional torna-se separável caindo no caso da aplicação da transformada unidimensional sobre cada dimensão da imagem.

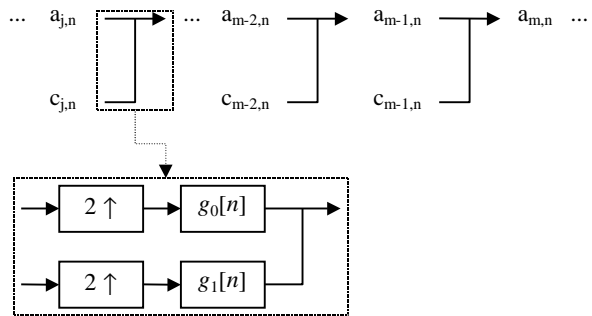


Fig. 2 - Processo de síntese formado pela repetição do banco de filtro $\{g_0[n], g_1[n]\}$.

Existem duas formas de se processar a transformada wavelet bidimensional. Na primeira, chamada de transformada padrão, processamos toda a transformada unidimensional das colunas da imagem, gerando os coeficientes de detalhe correspondentes, e em seguida processamos as linhas criando os coeficientes finais. O resultado é uma imagem subdividida em regiões quadradas e retangulares correspondendo às projeções da imagem sobre os diversos espaços bidimensionais $V_i \times V_j$, $V_i \times W_j$, $W_i \times V_j$ e $W_i \times W_j$, como pode ser visto no diagrama da Fig. 3.

Na segunda forma, chamada de não padrão, aplica-se alternadamente passos da transformada unidimensional às colunas e às linhas da imagem. O resultado é similar a construção de uma árvore quaternária de região (*Region Quadtree*), onde cada nível i da árvore corresponde a um nível da aplicação de parte da transformada, isto é, à projeção da imagem sobre os espaços $V_i \times V_i$, $V_i \times W_i$, $W_i \times V_i$ e $W_i \times W_i$. Cada nível de refinamento (cada nível i da árvore) corresponde a transformada da porção da imagem contida no espaço $V_{i+1} \times V_{i+1}$ (espaço imediatamente superior). Conseqüentemente, a imagem final será formada somente por regiões quadradas. A Fig. 4 mostra o mapa da transformada não-padrão e um exemplo de imagem transformada.

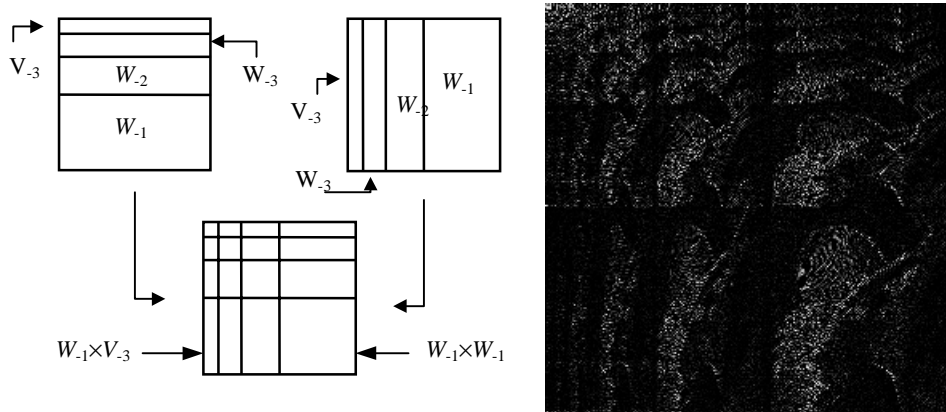


Fig. 3 - (esq.) Na transformação padrão, processa-se primeiro todas as colunas e, depois, as linhas. O resultado é um conjunto de porções retangulares e quadradas correspondendo a superposição dos espaços. (dir.) Exemplo da transformada padrão aplicada a imagem da LENA.

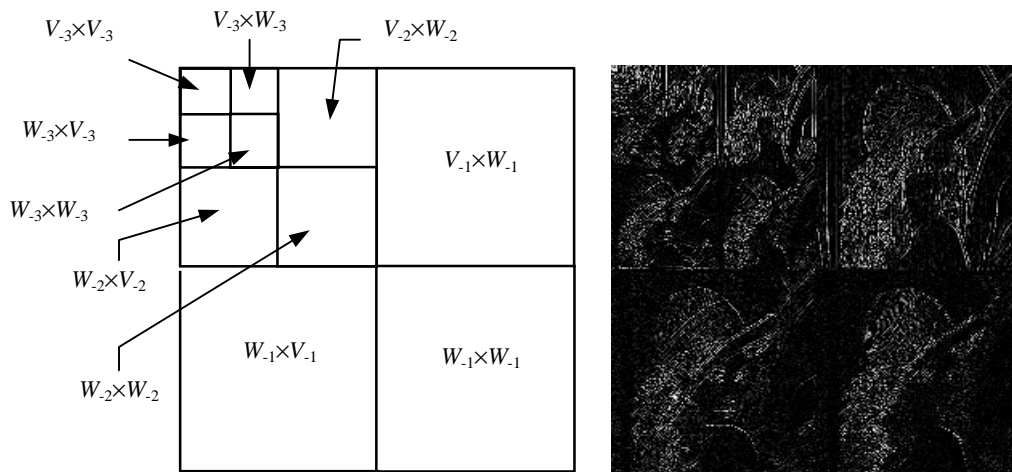


Fig. 4 - (esq.) As regiões geradas pelos passos da transformada não padrão são quadradas. Os espaços $V_i \times V_i$ são os únicos espaços processados ao longo do refinamento. (dir.) Imagem da LENA obtida através da transformada não padrão.

3. A Compressão

O método de compressão de imagens baseado na transformada wavelet deve tirar vantagem da esparsidade das imagens geradas ao longo da transformada. Um levantamento da função de densidade de probabilidade dos coeficientes da imagem transformada mostra que esta distribuição é tipicamente Laplaciana, isto é, existe uma grande quantidade de valores muito próximos de zero, que cai exponencialmente conforme se desloca para as extremidades do gráfico da distribuição.

Uma técnica apropriada em tal situação é a compressão sem perdas por codificação de entropia usando, por exemplo, código de Huffman ou codificação arit-

mética. No entanto, o comprimento dos códigos menos frequentes pode se tornar proibitivo se a quantidade de entradas distintas (os coeficientes da imagem transformada) for muito grande. Uma alternativa é adotar-se a mesma estratégia usada pelo esquema de compressão do JPEG [Pen93].

No JPEG, cada coeficiente não nulo é classificado segundo sua magnitude e segundo a quantidade de zeros que o precede. Uma vez classificado todos os coeficientes e levantada a função de densidade de probabilidade desta classificação, codifica-se a função usando o algoritmo de Huffman e acrescenta-se a informação da posição relativa do coeficiente dentro de sua categoria e

seu sinal. O artifício de classificação das magnitudes reduz bastante a quantidade de entradas da função de densidade de probabilidade, que funciona como geratriz da tabela de códigos.

O JPEG utiliza uma tabela com 242 entradas, que resume a classificação dos coeficientes em 15 categorias de magnitude – cada categoria i agrupa coeficientes com magnitude entre 2^{i-1} e 2^i (exclusive), $i = 1, \dots, 15$ – sendo que cada uma delas pode ser precedida de 0 até 15 zeros, mais duas categorias especiais: a da seqüência de 16 zeros (zero precedido de 15 outros zeros) e do fim de bloco (representado pela entrada zero precedido de nenhum zero). Como este esquema de codificação está baseado na classificação da “corrida de zeros” (*zero run code*) contra a magnitude dos elementos não nulos, e a imagem transformada pelas wavelets apresenta-se bastante esparsa, este método gera resultados muito bons.

Infelizmente, os coeficientes da imagem transformada não são valores inteiros significando que durante o processo de classificação deverá haver uma conversão de representação numérica, de ponto flutuante para inteiros. Obviamente isto introduz um erro de quantização tornando o processo de compressão um método com perdas. A partir deste ponto, a administração da propagação e dispersão do erro de quantização faz-se necessária. A técnica para tal controle é apresentada a seguir.

4. A Curva de Peano-Hilbert

Um problema típico nos algoritmos de *dithering* é a dispersão do erro introduzido pelo processo. Para cada modalidade de *dithering* (periódico ou aperiódico, por aglomeração ou dispersão pontual), a dispersão do erro ocasiona um resultado diferente. O objetivo do processo de *dithering* é a obtenção de uma reprodução de imagem que proporcione um bom resultado visual.

Dentro da classe dos algoritmos de *dithering* não-periódicos, existe uma família de algoritmos, baseados em aglomeração de pontos, que não possui direcionalidade no processo de dispersão do erro, como o que ocorre no algoritmo de Floyd-Steinberg, e não introduz qualquer tipo de repetição de padrão na textura da imagem reproduzida, justamente por não ser periódico.

Esta família é formada pelos algoritmos que utilizam curvas fractais conhecidas como curvas de Peano ou curvas de preenchimento de espaço (*space filling curves*) [Pei92]. De forma similar, os esquemas de compressão de imagem normalmente se deparam com o problema da dispersão do erro introduzido na etapa de quantização ou conversão de representação numérica dos dados, de ponto flutuante para representação inteira, usando truncamento ou arredondamento de valores.

Se a quantização/conversão for aplicada seqüenci-

almente a cada linha da imagem, e se o erro introduzido por ela for pequeno, o sistema visual humano trata naturalmente de eliminá-lo, dado que este é tipicamente um sistema passa-baixa. No entanto, um erro de quantização/conversão pequeno pode significar uma baixa taxa de compressão. Se deseja-se trabalhar com altas taxas, tem-se que admitir e administrar eficientemente grandes erros de quantização, e grandes erros correspondem ao surgimento de artefatos (padrões indesejáveis) na imagem reproduzida. Nesta situação, uma boa dispersão do erro é aconselhável, mas dado o método de enumeração seqüencial, linha a linha, esta dispersão torna-se quase impossível.

Uma forma de se reduzir o impacto de grandes erros de quantização/conversão na qualidade perceptual da imagem reconstruída é adotar uma enumeração não-linear de forma que o erro fique disperso visualmente. Este é o ponto de ligação entre o problema de dispersão de erro no *dithering* e da dispersão do erro de quantização/conversão na compressão de imagens. Da mesma forma que uma curva fractal pode ser utilizada para dispersar o erro no *dithering*, uma curva fractal também pode ser aplicada à etapa de enumeração da imagem para dispersar o erro de quantização.

A enumeração dos pixels de uma imagem consiste em definirmos um caminho pelo qual percorre-se de forma única e ordenada todos os seus elementos. No caso citado acima, onde percorre-se a imagem linha após linha, a enumeração apresenta uma descontinuidade ao passar de uma linha para a próxima, além de possuir uma grande direcionalidade horizontal ao longo do percurso. Portanto, qualquer erro introduzido também conterà esta direcionalidade, sendo esta a responsável pelo surgimento dos artefatos na imagem. Para quebrar esta direcionalidade, utiliza-se curvas de enumeração com base nas curvas de preenchimento do espaço – as *space filling curves*.

As curvas de Peano-Hilbert funcionam baseadas na partição do espaço, de forma contínua e única. Como cada partição é um subespaço similar ao original, as curvas de Peano-Hilbert podem ser novamente aplicadas a cada partição, gerando novas partições e assim por diante, até encontrar-se a partição elementar que, no caso de uma imagem digital, equivale a um pixel. A Fig. 5 mostra os passos de construção de uma das curvas de Peano-Hilbert que é usada no presente trabalho.

O esquema de partição recursivo do espaço, via curvas de Peano-Hilbert, garante uma enumeração univocamente ordenada dos pixels da imagem sem privilegiar uma direção, minimizando o aparecimento de artefatos – devido aos erros de quantização / conversão.

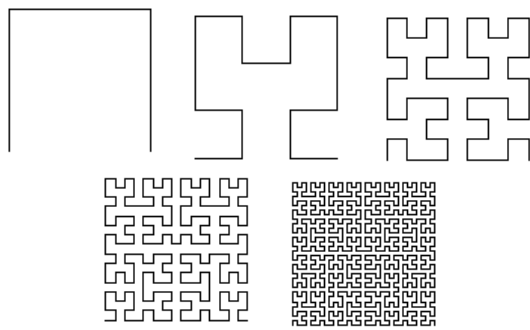


Fig. 5 - Processo de construção da curva de Peano-Hilbert através da partição recursiva do espaço.

5. As Estratégias

Uma aplicação típica de compressão / descompressão com perdas de imagens digitais segue as fases mostradas na Fig. 6. A fase de enumeração, não apresentada de forma explícita no diagrama acima, pode ser encaixada antes da fase de transformação ou entre as fases de transformação e quantização. O posicionamento da fase de enumeração é função do tipo de transformada adotada – no caso, transformada wavelet padrão, não padrão ou ainda unidimensional.

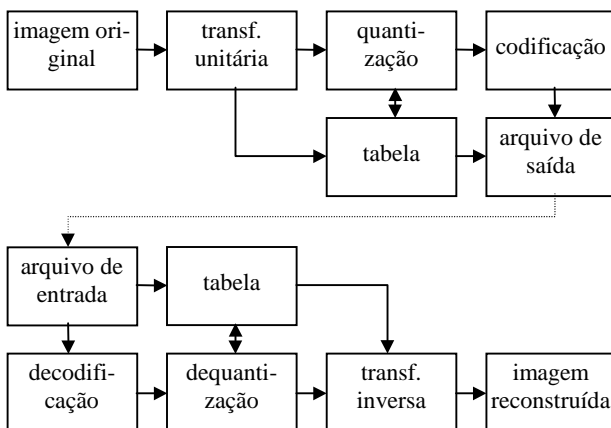


Fig. 6 - Princípio de funcionamento dos métodos de compressão com perdas.

No caso das transformadas wavelet bidimensionais, a enumeração via curva de Peano-Hilbert tem por função agrupar os coeficientes correlacionados. Sendo estes, em sua maioria, muito próximos de zero, o efeito obtido após a fase de quantização é a geração de longas seqüências de zeros. Como a fase de codificação utiliza a técnica do JPEG, quanto maior for a seqüência de zeros melhor será a compressão.

Certamente menos usual, mas nem por isso inválida, é a utilização da transformada unidimensional sobre toda a imagem. Para tanto faz-se necessário que a ima-

gem de entrada seja mapeada sobre um vetor, requisito este que é satisfeito novamente pela aplicação da curva de Peano-Hilbert. Semelhante ao caso anterior, a enumeração não-linear da curva de Peano-Hilbert tenderá a agrupar uma maior quantidade de pixels da imagem que estejam correlacionados, mais que qualquer outro tipo de enumeração.

Uma vez reduzida a dimensão da imagem, aplica-se a transformada unidimensional sobre o vetor gerado. Como as relações de vizinhança são mantidas após a transformada, o vetor de entrada na fase de quantização e posterior codificação possuirá longas seqüências de valores quase nulos que serão quantificados para zero. No processo de reconstrução da imagem, o mapeamento inverso da curva de Peano-Hilbert, levando o vetor unidimensional no domínio bidimensional, produz o efeito desejado de dispersão do erro de quantização resultando em imagens de excelente qualidade perceptual, tanto no caso da aplicação da fase de enumeração preceder a transformada como no caso da aplicação *a posteriori*.

Um outro detalhe, presente em muitos métodos de compressão, é a conversão do sistema de cores da imagem – de RGB para YIQ, YUV, YC_rC_b, ou HSI –. Com exceção do sistema HSI, os demais sistemas, baseados no canal de luminância mais dois canais, chamados de canais de cromaticidade, apresentam características importantes como: decorrelação entre canais de cor e redução da faixa dinâmica de dois canais. Se a imagem de uma cena natural for decomposta em seus canais primários – R, G e B – notaremos um alto grau de semelhança entre eles. Esta correlação gera uma grande quantidade de redundâncias quando os canais são processados separadamente. Porém, a conversão de RGB para os demais sistemas quebra esta correlação. Isto porque os sinais IQ, UV e C_rC_b são sinais diferença de cor, ou seja, são calculados a partir da diferença entre os canais R e Y, e B e Y.

6. Resultados e Conclusão

As imagens a seguir – Fig. 7 – são resultados da aplicação da estratégia de enumeração após transformação wavelet bidimensional padrão. Todas as imagens são 256x256, convertidas para o sistema YC_rC_b. Os canais de luminância de cada imagem foram codificados separados dos canais de cor. Como pode ser visto no Quadro 2, o tamanho dos arquivos, obtidos a partir da estratégia adotada, é comparável ao dos arquivos no formato JPEG. O *bit rate* foi calculado a partir do tamanho do arquivo final, descontando-se as informações não relacionadas à própria imagem.. Os filtros utilizados para a transformada wavelet foram os filtros de Lagrange (idênticos aos filtros de Daubechies) de comprimento 6 – Quadro 1.

Quadro 1 - Coeficientes do filtro de Lagrange.

$h_0(n)$	+0.332	+0.806	+0.459	-0.135	-0.085	+0.035
$h_1(n)$	-0.035	-0.085	+0.135	+0.459	-0.806	+0.332
$g_0(n)$	+0.035	-0.085	-0.135	+0.459	+0.806	+0.332
$g_1(n)$	+0.332	-0.806	+0.459	+0.135	-0.085	-0.035

Quadro 2 - Transformada WLT padrão + Peano-Hilbert + RGB→YCrCb.

Arq.	bit rate	WLT (kbytes)	JPEG (kbytes)
AMBER	0,0101	8,304	9,302
BARBARA	0,0199	16,093	14,596
LENA	0,0178	14,304	13,424

A adoção de uma enumeração não-linear baseada na curva de Peano-Hilbert capta de forma eficiente a correlação entre os pixels da imagem e da imagem transformada, dada sua natureza fractal. Associando-se esta técnica à conversão do sistema de cores, ao resultado da transformada wavelet e ao esquema de codificação do JPEG, foi possível alcançarmos bons resultados no que se refere a compressão de imagens. Este trabalho abre caminho para a investigação mais detalhada de outras curvas de preenchimento de espaço que possam ser associadas também a transformada wavelet. Outro ponto interessante a ser estudado é a utilização de transforma-

das wavelets inteiras [Dew97], o que eliminaria grande parte das perdas por quantização ou conversão numérica. Também, o uso de esquemas como *zerotree* [Xio97], para estruturar os dados antes de processá-los, é um caminho em potencial a ser seguido pelos métodos baseados em transformada wavelet. Por fim, é interessante observar que alguns pontos relacionados a otimização do método – alocação de bits, por exemplo – foram deixados de fora. Independente disso, a comparação do tamanho dos arquivos e a qualidade das imagens obtidas indicam que o método é promissor.

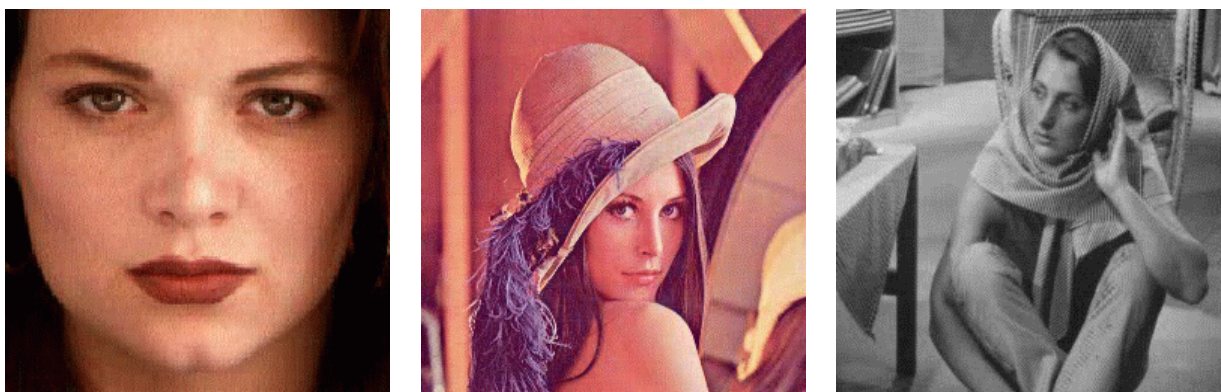


Fig. 7 - Imagem da AMBER e LENA, cujos PSNR valem (31.563, 33.902, 30.892) dB e (33.041, 34.805, 31.813) dB para cada canal RGB respectivamente, e da BARBARA com PSNR igual a 36.906 dB.

7. Referências

- [Ans91] ANSARI, R., GUILÉMOT, C., KAISER, J. F.: "Wavelet Construction using Lagrange Halfband Filters", IEEE Trans. CAS, vol. 38, pp. 1116-1118, 1991.
- [Ant92] ANTONINI, M., BARLAUD, M., MATHIEU, P., DAUBECHIES, I.: "Image Coding using Wavelet Transform", IEEE Trans. Image Proc., vol 1, pp. 205-221, 1992.
- [Bat87] BATTLE, G.: "A Block Spin Construction of Wavelets Part I Lemarié Functions", Comm. Math. Phys., vol. 110, pp. 601-615, 1987.
- [Bur83] BURT, P. J., ADELSON, E. H.: "The Laplacian pyramid as a compact image code", IEEE Trans. Comm., COMM 31, pp. 532-540, 1983.
- [Cla95] CLARKE, R. J.: "Digital Compression of Still Images and Video", Series in Signal Proc. and its App., Ed. Academic Press, 1995.
- [Dau88] DAUBECHIES, I.: "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. on Pure and Applied Math, vol. 41, pp. 909-996, 1988.
- [Dau90] DAUBECHIES, I.: "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 36, pp. 961-1005, 1990.
- [Del79] DELP, E. J., MITCHELL, O. R.: "Image compression using block truncation coding", IEEE Trans. Comm., COM 37, pp. 1335-1342, 1979.
- [Del91] DELP, E. J., MITCHELL, O. R.: "The use of block truncation coding in DPCM image coding", IEEE Trans. Signal Proc., vol 39, pp. 967-971, 1991.
- [Der94] DEROSE, T. D., STOLLNITZ, E. J., SALESIN, D. H.: "Wavelets for Computer Graphics: A Primer", TR. 94-09-11, Dep. of Comp. Sci. and Eng., University of Washington, 1994.
- [Dew97] DEWITTE, S., CORNELIS, J.: "Lossless Integer Wavelet Transform", IEEE Signal Proc. Letters, vol. 4, pp. 158-160, 1997.
- [Est77] ESTEBAN, D., GALAND, C.: "Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes", Proc. IEEE ICASSP'77, pp. 191-195, 1977.
- [Hil94] HILTON, M. L., JAWERTH, B., SENGUPTA, A.: "Compressing Still and Moving Images with Wavelets", Multimedia Systems, vol. 2(3), 1994.
- [Lem88] LEMARIÉ, P. G.: "Une nouvelle base d'ondelettes de $L_2(\mathbb{R})$ ", Jour. Math. Pures et Appl., vol. 67, pp. 227-238, 1988.
- [Mal89] MALLAT, S. G.: "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the wavelet representation", IEEE Trans. Pat. Analysis and Mach. Intell., vol. 11, pp. 674-693, 1989.
- [Pei92] PEITGEN, H. O., JÜRGENS, H., SAUPE, D.: "Chaos and Fractals. New Frontiers of Science", Ed. Springer-Verlag, 1992.
- [Pen93] PENNEBAKER, W. B., MITCHELL, J. L.: "JPEG Still Image Data Compression Standard", Ed. Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [Rab91] RABBANI, M., JONES, P. W.: "Digital Image Compression Techniques", Tutorial Texts in Optical Engineering, SPIE Press, vol. TT7, 1991.
- [Say96] SAYOOD, K.: "Introduction to Data Compression", Morgan Kaufmann Pub., 1996.
- [Smi84] SMITH, M. J. T., BARNWELL III, T. P.: "A Procedure for Designing Exact Reconstruction Filter Banks for Tree Structure Subband Coders", Proc. IEEE ICASSP'84, pp. 27.1.1-27.1.4, 1984.
- [Str81] STROMBERG, J. O.: "A modified Haar system and higher order spline systems", in Conf. in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, vol. II, pp. 475-493, 1981.
- [Swe94] SWELDENS, W., JAWERTH, B.: "An Overview of Wavelet Based Multiresolution Analyses", SIAM Rev., vol. 36, nr. 3, pp. 377-412, 1994.
- [Vai85] VAIDYANATHAN, P.: "On Power-Complementary FIR Filters", IEEE Trans. CAS, vol. 32, pp. 1308-1310, 1985.
- [Vet95] VETTERLI, M., KOVACEVIC, J.: "Wavelets and Subband Coding", Ed. Prentice-Hall Inc., 1995.
- [Wil90] WILSON, R., TODD, M., CAWAY, A. D.: "Generalised quadrees: a unified approach to multiresolution image analysis and coding", SPIE Proc. 1360, pp. 619-626, 1990.
- [Xio97] XIONG, Z., RAMCHANDRAN, K., ORCHARD, M.: "Space-frequency Quantization for Wavelet Image Coding", IEEE Trans. Image Proc., vol. 6, pp. 677-693, 1997.