

# Wavelets Polinomiais: Uma Família de Funções Splines para Aplicações em Processamento de Sinais e Imagens

JOÃO FERNANDO MARAR<sup>1,2</sup>  
EDSON COSTA B. C. FILHO<sup>2</sup>  
GERMANO CRISPIM VASCONCELOS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UNESP–Universidade Estadual Paulista  
Laboratório de Sistemas de Tempo Real  
Faculdade de Ciências - Departamento de Computação  
Bauru, São Paulo, Brasil  
jfm@di.ufpe.br

<sup>2</sup>UFPE–Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Informática  
Caixa Postal 7851  
50732-970 Recife, Pernambuco, Brasil  
jfm,ecdbcf,gcv@di.ufpe.br

**Abstract.** In this paper, a family of polynomial wavelets generated from powers of sigmoid functions is presented. It is described how networks of wavelet units based on these functions can be constructed, through the appropriate definition of the function coefficients, and its be applied to signal processing and image processing tasks. As an example of application for the method proposed, it is studied the problem of function approximation by neural networks of polynomial wavelets and the problem of image compression based on multi-resolution analysis.

## 1 Introdução

Na área de processamento de sinais e, particularmente, em processamento de imagens tem ocorrido um razoável investimento em pesquisas para o desenvolvimento de novas técnicas e métodos que possam ser empregados em um amplo domínio de aplicações [GW91]. Uma das preocupações básicas diz respeito com a transformação adequada de sinais, de modo que os mesmos possam ser analisados e “formas comportadas” de sua representação possam ser extraídas, economizando o espaço de memória necessário para o armazenamento e a diminuição da demanda computacional exigida [Mor89],[MM92].

A transformação de sinal entre os domínios do tempo e frequência, geralmente não se configura como um problema de grandes proporções e várias ferramentas matemáticas estão disponíveis. Para isto a utilização das Transformadas de Fourier, Laplace, Z, Karhunen-Loève, Wavelets entre outras [OS75], [Chu92], [MF94],[JZD+94].

Atualmente, as transformadas wavelets tem conseguido um lugar de destaque em relação as demais transformadas devido a sua eficiência computacional e a existência de algoritmos rápidos tanto para transformada direta como a sua inversa [Mal89].

Neste sentido, investimos esforços para a cons-

trução de uma família de funções polinomiais, denominada Polinômios Potências de Sigmóides (PPS), e uma técnica analítica para encontrar os coeficientes em PPS para a geração de uma família de funções Wavelets polinomiais [Mar96]. Neste trabalho, apresentamos com alguns detalhes os procedimentos para a geração da família de funções Wavelets polinomiais, e apresentamos também duas aplicações para elas. Na primeira aplicação, mostramos um modelo adaptativo para aproximação de funções, realizado por uma Rede Neural Artificial com funções de ativação Wavelet polinomial. A segunda aplicação se refere a uma tarefa de compressão de imagens através de uma técnica piramidal [JAN94] para a decomposição dos coeficientes wavelets.

Antes porém de iniciarmos o processo de construção de uma família de Wavelets polinomiais, baseada em Polinômios Potências de Sigmóides, são necessários alguns resultados pertencentes ao Espaço de Hilbert e a idéia de frames para Wavelets. A noção de frames, foi primeiramente introduzida por Duffin e Shaeffer em [DS52]. Frames correspondem a uma generalização de bases ortogonais para o espaço de Hilbert.

## 2 Espaço de Hilbert e Frames para Wavelets

Sem perder a generalidade, trataremos em nosso artigo as definições básicas de Wavelets para funções pertencentes ao  $L^2(\mathfrak{R})$ . Para isso, vamos recordar algumas propriedades fundamentais do espaço de Hilbert, que é um espaço vetorial munido de produto interno.

Toda função  $f(x)$  é dita quadrado integrável,  $L^2(\mathfrak{R})$ , se e somente se satisfizer a Equação 1:

$$\int_{\mathfrak{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (1)$$

Se  $f(x)$  e  $g(x) \in L^2(\mathfrak{R})$ , então o produto interno  $\langle f(x), g(x) \rangle$  é definido pela Equação 2:

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (2)$$

onde  $\overline{g(x)}$  corresponde ao conjugado complexo da função  $g(x)$  e a norma sobre o  $L^2(\mathfrak{R})$  é definida por  $\|g(x)\| = \langle g(x), g(x) \rangle$ .

Estes conceitos são de fundamental importância para a definição de frames no espaço de Hilbert. Vamos considerar o conjunto de todas as funções  $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  com a seguinte Propriedade 3:

$$\Psi = \{r^{\frac{n}{2}} \varphi(r^n x - t) | t, r \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{Z}\} \quad (3)$$

onde  $t$  e  $r$  são translações e dilatações, e  $r^{\frac{n}{2}}$  é uma constante para tornar  $\|\varphi(r^n x - t)\|^2 = 1$ , e  $\varphi(x)$  é denominada função mãe. O Conjunto  $\Psi$  é dito um frame, se satisfizer a seguinte propriedade:

Existem duas constantes  $A > 0$  e  $B < \infty$  tal que, para todas as funções  $g(x) \in L^2(\mathfrak{R})$ , a seguinte Relação 4 é válida:

$$A \|g(x)\|^2 \leq \sum_{\varphi \in \Psi} |\langle \varphi, g(x) \rangle|^2 \leq B \|g(x)\|^2 \quad (4)$$

Como consequência direta da Relação 4 é o fato da família  $\Psi$  ser densa no  $L^2(\mathfrak{R})$ . Para que tenhamos um frame a partir da função mãe,  $\varphi(\bullet)$ , a seguinte condição 5 de admissibilidade deve ser satisfeita:

$$\int \frac{|\widehat{\varphi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (5)$$

de 5, implica que  $\int \varphi(x) dx = 0$  [Dau88a].

## 3 Construção de uma Família de Wavelets Polinomiais baseada em PPS

Através da teoria sobre as Séries de Taylor [IK66], a derivada de uma função  $f(x)$  em  $x = x_0$  é definida por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

desde que o limite exista. Portanto, se computarmos a Equação 6:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (6)$$

para um valor pequeno de  $\Delta x$ , devemos ter uma aproximação bastante razoável para  $f'(x_0)$ . Naturalmente,  $\Delta x$  pode ser positivo ou negativo. Assim, se utilizarmos valores positivos para  $\Delta x$ , temos então:

$$\frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \quad (7)$$

Destas propriedades, podemos dizer que a média das Equações 6 e 7 também será uma boa aproximação para  $f'(x_0)$ . De maneira que podemos escrever a seguinte Equação 8:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (8)$$

Por conveniência, faremos  $p = 2\Delta x$  substituindo esse termo na Equação 8. Desta forma, temos a Equação 9:

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + \frac{p}{2}) - f(x_0 - \frac{p}{2})}{p} \quad (9)$$

Vamos agora computar um valor aproximado para a segunda derivada de  $f(x)$  em  $x = x_0$ . Da Equação 9, substituímos  $f(x)$  por  $f'(x)$ , e temos a Equação 10:

$$f''(x_0) \simeq \frac{f'(x_0 + \frac{p}{2}) - f'(x_0 - \frac{p}{2})}{p} \quad (10)$$

Utilizando novamente a Equação 9, podemos escrever:

$$f'(x_0 + \frac{p}{2}) \simeq \frac{f(x_0 + p) - f(x_0)}{p}$$

e

$$f'(x_0 - \frac{p}{2}) \simeq \frac{f(x_0) - f(x_0 - p)}{p}$$

Aplicando estes resultados na Equação 10, temos que a segunda derivada de  $f(x)$  em  $x = x_0$  é dada por:

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0 + p) - 2f(x_0) + f(x_0 - p)}{p^2}$$

Podemos considerar, como um dos exemplos de aplicação da dedução de  $f''$  acima descrita, a função  $\varphi(x)$  expressa na Equação 11, proposta por Pati e Krishnaprasad [PK93] e que é muito utilizada em vários trabalhos com uma “roupagem” diferente, isto é, a equação analítica assume formas diversas; como em [Mar82], onde é apresentada uma aplicação para a mesma função no algoritmo *zero-crossing* em detecção de contornos.

$$\varphi(x) = sig(x + p) + sig(x - p) - 2.sig(x) \quad (11)$$

onde  $p \in Z$ ,  $sig(x) = \frac{1}{1+exp(-x)}$  e a sua derivada em relação a  $x$  é dada por  $sig(x)' = sig(x)(1 - sig(x))$ , a Equação 11 é válida para valores maiores que 2. Em [PK93], foi adotado o valor  $p = 2$ . No referido artigo, é mostrado que esta função satisfaz a condição de admissibilidade para Wavelets, Equação 5.

Tomemos a Equação 11, se dividirmos ambos os lados da Equação 11 por  $p^2$  e tomarmos o limite da função quando  $p$  tende a zero, conforme a Equação 12:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{sig(x + p) + sig(x - p) - 2.sig(x)}{p^2} \quad (12)$$

Verificamos que a Equação é exatamente (por definição) a derivada segunda da função sigmóide, que é obtida pela Equação 13. A derivada segunda da função sigmóide, foi gerada a partir da derivada primeira, citada anteriormente, a qual é dada pela Equação 13:

$$\frac{d^2 sig(x)}{dx^2} = sig(x).(1-sig(x))^2 + (-sig(x))^2.(1-sig(x)) \quad (13)$$

Reagrupando os termos, e reescrevendo a Equação 13 temos uma forma polinomial dada por:

$$\varphi_2(x) = 2.sig(x)^3 - 3.sig(x)^2 + sig(x) \quad (14)$$

onde denominamos por  $\varphi_2(x)$  a primeira função polinomial Wavelet gerada pela derivada segunda da função sigmóide. A Figura 1 ilustra as nove primeiras funções polinomiais obtidas através das derivadas sucessivas da função sigmóide.

Como resultado importante a ser destacado neste ponto, é o fato de que o conjunto de funções Wavelets  $\{\varphi_i(x)\}$  gerado desta maneira é composto por funções pertencentes ao  $L^2(\mathbb{R})$  que satisfazem a condição 5 de admissibilidade para Wavelets. Por consequência de 5, a família de funções compostas de translações e dilatações de cada uma das funções da família  $\varphi_i$  é densa no espaço das funções quadrado integráveis.

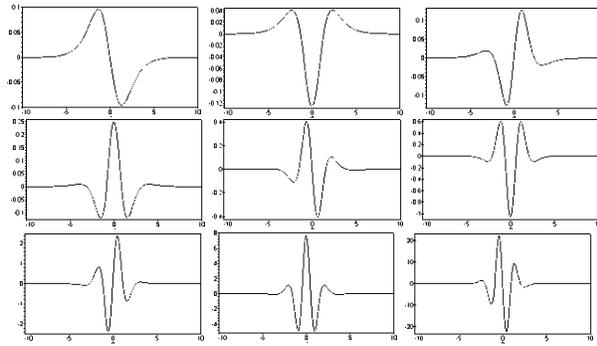


Figura 1: Ilustração dos elementos  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$  and  $\varphi_{10}$ , pertencentes a família de Wavelets Polinomiais obtidas através das Potências da Função Sigmóide.

Na próxima seção é mostrado como essa família de funções pode ser empregada de forma eficiente em aplicações de aproximação de funções e em tarefas de processamento de imagens.

## 4 Aplicações de Wavelets Polinomiais Geradas por PPS

### 4.1 Aproximadores de Funções

A investigação de técnicas que combinam redes neurais, Wavelets e aproximadores universais, encontra-se abordada através de vários artigos [Dau88b], [ZB92], [STK92], [PK93], [GSG<sup>+</sup>96] [MFV96], [Mar96]. Em Daugman [Dau88b], redes neurais são utilizadas para aprender os melhores coeficientes para a aproximação de imagens através da função de Gabor, mais especificamente, Wavelet de Gabor. Szu et al [ZB92], utilizam a função  $h(t) = \cos(1.75t) \cdot \exp(-\frac{t^2}{2})$  como Wavelet mãe para a representação e classificação de fonemas. Zhang e Beveniste [ZB92], tratam as *wavenets* (uma contração de redes neurais com Wavelets) como aproximadores de funções. Pati e Krishnaprasad [PK93] mostram a construção de uma função Wavelet por combinação de funções sigmoidais, bem como realizam a expansão em transformada Wavelet através de redes neurais. Recentemente, Weigang et al [GSG<sup>+</sup>96] mostraram como *Wavenets* podem ser empregadas para a predição de condições meteorológicas na região do nordeste brasileiro.

Dentro deste contexto, apresentamos neste trabalho uma maneira prática para a utilização das Wavelets geradas a partir de potências de funções sigmoidais, para o projeto de redes neurais do tipo *feed-forward*. Através de uma aplicação prática, mostramos o poder adaptativo das redes neurais baseadas

nesta funções geradas.

De um modo geral, toda função contínua pode ser representada pela Equação 15 [STK92]:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^m a_i^1 \varphi\left(\frac{x - a_i^2}{a_i^3}\right) \quad (15)$$

onde  $a_i^1, a_i^2$  e  $a_i^3$  são respectivamente coeficientes, translações e dilatações da função mãe  $\varphi$  [Chu92] e  $m$  é o número de funções básicas utilizadas. Sob o ponto de vista de redes neurais artificiais, esta representação é ilustrada pela arquitetura neural da Figura 2.

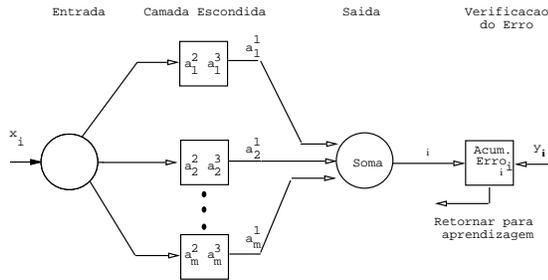


Figura 2: Arquitetura de uma rede neural baseada em Wavelets. Os quadrados na camada escondida, correspondem as funções filhas que serão adaptadas, e o quadrado rotulado por *acum.erro<sub>i</sub>* corresponde a função custo: caso o erro total ultrapasse o erro desejado, o processo retorna a aprendizagem .

Os parâmetros da rede ( $a_i^1, a_i^2$  e  $a_i^3$ ) são adaptados com o objetivo de minimizar a função custo, que em nossos experimentos corresponde a função  $\chi^2$ , definida pela Equação 16:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \sum_{k=1}^m a_k^1 \varphi\left(\frac{x_i - a_k^2}{a_k^3}\right)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (16)$$

onde  $n$  é o número de amostras da função e  $m$  é o número de funções básicas utilizadas. Como tratamos de Wavelets, estas funções são comumente denominadas por funções filhas.

#### 4.1.1 Wavenet Baseada em PPS

Nesta seção, mostramos a título de exemplo, a capacidade adaptativa de uma das funções da família  $\{\varphi_i(x)\}$  definida anteriormente, no caso em estudo, a função  $\varphi_2(x)$ . Como é sabido, O processo de aprendizagem requer a utilização de algum método que minimize o erro da função custo, Equação 16 . Em geral, algoritmos do tipo gradiente descendente e gradiente conjugado atuando sobre a função custo

padrão do backpropagation podem ser empregadas na definição dos coeficientes da rede. Entretanto, estes são frequentemente muito lentos [SG92]. Em nosso experimento, utilizamos o método Levenberg-Marquardt [Mar63], um elegante método que partilha das vantagens do método gradiente descendente e a rapidez do método da inversa da matriz Hessian [PFTV92]. A título de exemplo, utilizamos como dados de treinamento a função dada pela Equação 17, a Figura 3 ilustra o gráfico da função 17.

$$f(x) = \text{sig}(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x)) \quad (17)$$

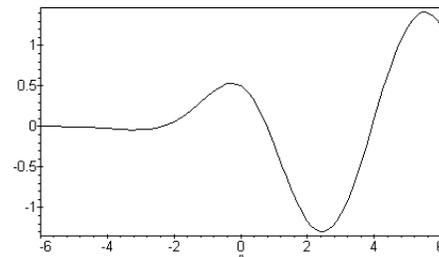


Figura 3: função teste  $\text{sig}(x) \cdot (\cos(x) - \sin(x))$ .

O processo de treinamento, foi realizado utilizando 9 Wavelets, 90 amostras igualmente espaçadas da função ilustrada em 3, o intervalo  $[-6, 6]$  foi escolhido para a aproximação, (note que poderia ser um intervalo qualquer), e o erro total da aproximação foi estabelecido ser inferior a 0.01 a finalização do processo de aprendizagem. Inicialmente, os parâmetros da rede, foram setados com valores aleatórios. O resultado da aproximação, obtido pela aplicação do método Levenberg-Marquardt com a função mãe  $\varphi_2(x)$  é ilustrado na figura 4. Nesta figura, apresentamos 4 fases distintas do processo de aprendizagem, mais especificamente: a iteração de número 28, 65, 164 e finalmente a 198 onde ocorreu a convergência.

#### 4.2 Análise por Multiresolução

Em geral, Wavelets não são sistemas ortogonais. Entretanto, podemos construir uma base de Wavelets ortogonais pela escolha apropriada dos parâmetros  $r, t$  e a função  $\varphi$  da Equação 3. Se para o parâmetro  $r$  utilizarmos  $(2^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , as Wavelets terão um relacionamento próximo a uma expressão de multiresolução [Mal89]. Vamos elucidar melhor este problema. Este processo é iniciado com uma apropriada escolha da função  $\varphi$  conhecida por escala. Dentre as principais propriedades da função escolhida para a escala, a mais importante é que a família de funções

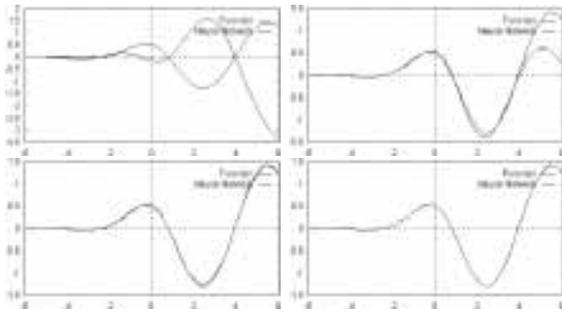


Figura 4: Processo de adaptação das Wavelets filhas de  $\varphi_2(x)$ . A ilustração corresponde as épocas 28,65,164 e 198 do processo de treinamento.

$\{\varphi(x - k), k \in Z\}$  gera uma base ortogonal para o espaço  $V_0$ . A seguinte relação descreve a análise por multiresolução:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$$

os espaços  $V_j$  são aninhados. Uma propriedade importante é que  $\cup_{j \in Z} V_j$  é um conjunto denso no  $L^2(\mathfrak{R})$ , isto é, qualquer função do  $L^2(\mathfrak{R})$  é escrita como combinação linear do conjunto  $\cup_{j \in Z} V_j$ , e a interseção dos espaços  $V_j$  é vazia. Outra propriedade importante em análise por multiresolução é:

$$f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1} \quad j \in Z$$

os espaços  $V_j$  e  $V_{j+1}$  são similares, a menos de escala, isto é, se  $V_j$  é descrito pelas funções  $\varphi_{jk}(x - k), k \in Z$  então o espaço  $V_{j+1}$  é descrito pelas funções  $\varphi_{j+1,k}(x - k), k \in Z$ , onde  $\varphi_{j+1,k}(x - k) = \sqrt{2}\varphi_{jk}(2x - k)$ .

Vamos mostrar agora, como as Wavelets entram nesta *história*. Dado que  $V_0 \subset V_1$ , qualquer função de  $V_0$  pode ser escrita como combinação linear das funções  $\sqrt{2}\varphi(2x - k)$  pertencentes a  $V_1$ . Em particular:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n h_k \sqrt{2}\varphi(2x - k) \quad (18)$$

onde os coeficientes  $h_k$  são definidos pelo produto interno de  $\varphi(x)$  e  $\varphi(2x - k)$ . Consideramos agora o complemento ortogonal de  $V_j$  para  $V_{j+1}$ , o qual denotamos por  $W_j$ , de maneira que podemos escrever a Equação 19:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (19)$$

Das Equações 18 e 19, podemos escrever a Equação 20:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k h_{1-k} \sqrt{2}\varphi(2x - k) \quad (20)$$

Em [Dau90] é mostrado que  $\{\sqrt{2}\psi(2x - k), k \in Z\}$  é uma base ortogonal para  $W_1$ . Por extensão, o conjunto  $\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k), k \in Z\}$  é uma base para  $W_j$ . A família de funções  $\psi_{j,k}(x) = \{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k), k \in Z\}$  é uma base para o  $L^2(\mathfrak{R})$ .

Em processamento de sinais, os coeficientes utilizados nas Equações 18 e 20, isto é,  $h_k$  e  $(-1)^k h_{1-k}$  são conhecidos por *Quadrature Mirror Filters* (QMF). Na realidade,  $h_k$  corresponde a um filtro passa baixa e  $(-1)^k h_{1-k}$  a um filtro passa alta. A título de eficiência computacional, a análise por multiresolução está intimamente conectada a teoria dos algoritmos piramidais [Ros84].

Muitos artigos tratam das propriedades e vantagens da aplicação desta técnica em vários problemas da área de processamento de sinais e visão computacional [Dau88a], [Mal89], [Mur93], [VTG94].

Nesta seção, vamos ilustrar um exemplo de aproximação de funções baseado em Wavelet de Haar [Chu92] e outro exemplo de compressão de imagens através de Transformada Wavelet utilizando a função polinomial  $\varphi_5(x)$  ilustrada na Figura 1, para ambos os casos utilizamos o algoritmo de decomposição e reconstrução em Wavelet proposto por Mallat [Mal89]. Basicamente, este algoritmo resume-se em construir uma base ortonormal de Wavelets para um espaço  $p$ -dimensional usando o produto tensor de  $p$  funções que geram subespaços do  $L^2(\mathfrak{R})$ . Em [Mur93], Muraki apresenta um estudo de caso para imagens tridimensionais.

Para o caso uni-dimensional, ilustramos uma aplicação bastante interessante das wavelets de Haar, associada ao problema de aproximação de funções por composição de escalas. Para esta aplicação utilizamos a mesma função apresentada na Equação 17. A Figura 5 ilustra os resultados obtidos através das sucessivas aproximação realizadas.

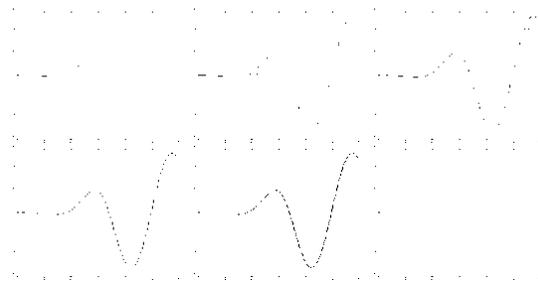


Figura 5: Processo de aproximação de funções realizado por composição de Wavelets de Haar de diferentes escalas, iniciando de cima para baixo e da esquerda para à direita.

A análise por multiresolução desenvolvida por Mallat [Mal89] é descrita pelo esquema da Figura 6, que corresponde a decomposição de uma função bi-dimensional atuando sobre as linha e colunas da imagem. Note que este processo é facilmente estendido para qualquer dimensão.

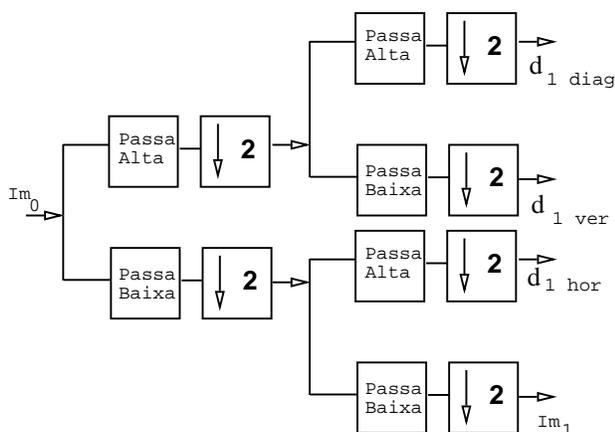


Figura 6: Representação de filtragens passa alta e passa baixa sobre linhas e colunas de sinais bi-dimensionais para a decomposição Wavelet. O processo de reconstrução é realizado de modo inverso.

Com algumas operações algébricas, a noção de produto tensorial de funções e as propriedades de análise por multiresolução, podemos escrever três Wavelets, Equações 21-23, para a operação de decomposição piramidal em imagens (caso bi-dimensional):

$$\Psi^h(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad (21)$$

$$\Psi^v(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (22)$$

$$\Psi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (23)$$

Em uma imagem, as bordas horizontais serão ilustradas em  $d_{1,hor}$ , as bordas verticais em  $d_{1,ver}$  e as bordas diagonais em  $d_{1,diag}$  como ilustradas na Figura 6. A imagem original ( $Im_0$ ) corresponde a uma matriz de  $N \times N$  elementos (níveis de cinza, no caso de imagens) e cada  $d_{1,\bullet}$  corresponde a uma matriz de  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$  elementos. Este processo é realizado recursivamente, isto é, as imagens  $Im_\bullet$  são aplicadas ao processo ilustrado pela Figura 6 até terminar as possibilidades de decomposição ou um número de níveis pré estabelecido pelo usuário.

A Figura 7 ilustra o esquema de decomposição sobre uma imagem real. Uma aplicação das Wavelets de Haar para extração de características em assinaturas *off-line* (imagens 2D), pode ser vista em [MF95], a Figura 7 (à direita) ilustra a decomposição por Transformada Wavelet baseada no algoritmo piramidal com 6 níveis.



Figura 7: Visualização esquemática da Transformada Wavelet bi-dimensional com dois níveis é ilustrada na figura a esquerda. A figura a direita ilustra a visualização de um exemplo de Assinatura *off-line* e suas decomposições por Transformada Wavelet [MF95].

#### 4.2.1 Compressão de Imagens Baseada em PPS

Como vimos, em análise por multiresolução, a operação de convolução dos filtros passa baixa e passa alta sobre uma imagem resultará nos coeficientes da decomposição Wavelet. Os detalhes sobre a imagem, isto é, os coeficientes associados as bordas verticais, horizontais e diagonais estão associados ao filtro passa alta. Quando os detalhes possuem pequenas magnitudes, eles podem ser omitidos sem afetar substancialmente o efeito perceptual da visão humana a respeito da imagem.

Assim, a noção de limiar em coeficientes das Wavelets corresponde a uma maneira de retirar detalhes não relevantes, que são considerados ruídos, de maneira a comprimir a informação necessária para a reconstrução da imagem [DJKP93].

Neste artigo, apresentamos os resultados de alguns experimentos realizados para a compressão de imagens de tamanho  $256 \times 256$  codificados em 256 tons de cinza através do algoritmo piramidal com quatro níveis, usando a função Wavelet  $\varphi_5(x)$  e variando os limiares. A Figura 8 ilustra os resultados obtidos para as imagens reconstruídas após a compressão realizada.

Na Figura 8, a imagem do canto superior es-

querdo corresponde a imagem original, a imagem do canto superior direito corresponde a imagem com taxa de informação de 0.280640 bits/pixel a qual corresponde a uma compressão de 28.506308:1, a imagem do canto inferior esquerdo corresponde a imagem com taxa de informação de 0.145752 bits/pixel a qual corresponde a uma compressão de 54.88772:1 e por última, a imagem do canto inferior direito corresponde a imagem com taxa de informação de 0.1011196 bits/pixel a qual corresponde a uma compressão de 79.054283:1.

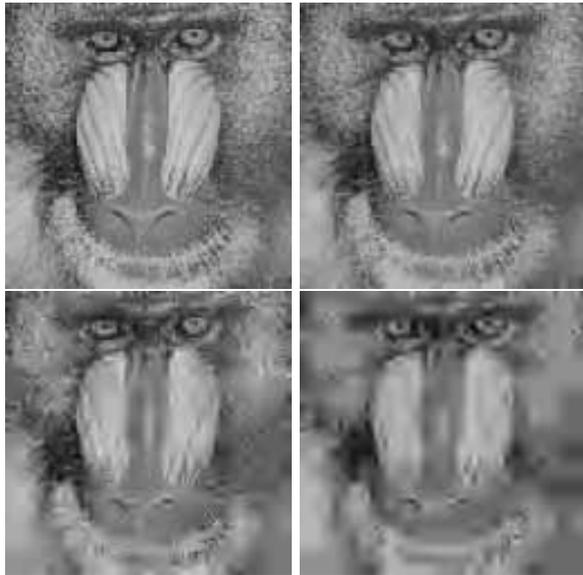


Figura 8: As imagens ilustram os resultados obtidos através do processo de compressão. Observando da esquerda para a direita e de cima para baixo temos: a imagem original, a imagem comprimida 28.506308:1, a imagem comprimida 54.88772:1 e a imagem comprimida 79.054283:1

## 5 Conclusões

Neste artigo apresentamos uma família de funções denominada Polinômios Potências de Sigmóides. Através de uma escolha conveniente de coeficientes inteiros, é construída uma família de funções polinômiais Wavelets que são extremamente úteis para o projeto de arquiteturas em Redes Neurais Artificiais, como exemplo, ilustramos uma aplicação da função  $\varphi_2(x)$  como função de ativação em redes neurais do tipo *feedforward* e mostramos a capacidade adaptativa da função  $\varphi_2(x)$  em problemas de aproximação de funções. Mostramos também uma aplicação de compressão de imagens através de transfor-

## REFERÊNCIAS

mas ortogonais geradas a partir da função  $\varphi_5(x)$  para a utilização em técnicas de análise por multiresolução. Baseado nos resultados encontrados, verifica-se a potencialidade do emprego da família de funções  $\{\varphi_i(x)\}$  como uma abordagem eficiente em uma gama variada de possíveis aplicações.

## 6 Agradecimentos

Este trabalho contou com o suporte financeiro da CAPES/PICD. O primeiro autor é muito grato à colaboração dos Professores: Dr. Alejandro Cesar Freyre Orgambide, Dr. José Dias dos Santos, Dr. Benedito Melo Acioly do Departamento de Informática da Universidade Federal de Pernambuco e ao Dr. Dante Augusto Couto Barone do Instituto de Informática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelas inúmeras sugestões para o desenvolvimento desta pesquisa.

## Referências

- [Chu92] C.S. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Inc, Boston, 1992.
- [Dau88a] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Appl. Maths*, pages 91:909–996, 1988.
- [Dau88b] J. Daugman. Complete discrete 2-d gabor transforms by neural networks for image analysis and compression. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Proc.*, 8, July 1988.
- [Dau90] I. Daubechies. The wavelets transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. on Information Theory*, page 36:961:1005, 1990.
- [DJKP93] D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Density estimation by wavelet thresholding. Technical report, TR, Dep. of Statistics, Stanford University, ftp playfair.stanford.edu, 1993.
- [DS52] R.J. Duffin and A.C. Shaeffer. A class of nonharmonic fourier series. *Trans. American Math. Society*, pages 72:341–366, 1952.
- [GSG<sup>+</sup>96] L.W. Gang, L.D.A. Sa, G.S.S.D. Prasad, A.G. Nowosad, M. J. A. Bolzan, and E. S. M. Chiang. Neural network adaptive wavelets for the northeastern brazil rainfall anomalies time series. *SPIE-Aerosense/96- 10th Annual International Anais do IX SIBGRAPI, outubro de 1996*

- Aerosense Symposium*, 2760-Applications and Science of Artificial Neural Networks II:175-187, 1996.
- [GW91] R.C. Gonzalez and R.E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, 1991.
- [IK66] E. Isaacson and H.B. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [JAN94] M.M. Jourdan, A. Alcaim, and P.R.R.L. Nunes. Pré-processamento em codificação de imagens por sub-bandas para redução de irrelevância visual. *VII SIBGRAPI - Curitiba-PR*, pages 23-29, 1994.
- [JZD<sup>+</sup>94] A. Judtsky, Q. Zhang, B. Delyon, P-Y. Glorennec, and A. Benveniste. Wavelets in identification - wavelets, splines, neurons, fuzzies: How good for identification? Technical report, IRISA-France, 1994.
- [Mal89] Stephane G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:674-692, July 1989.
- [Mar63] D.W. Marquardt. *Journal Soc. Ind. Appl. Math*, 11:431-441, 1963.
- [Mar82] D. Marr. *Vision*. Freeman- New York, 1982.
- [Mar96] J.Fernando Marar. Polinômios potências de sigmóides: Uma nova ferramenta para aproximação de funções e construção de wavenets. *Tese de Doutorado DI/UFPE - em preparação*, 1996.
- [MF94] J.Fernando Marar and E.C.B.C. Filho. Reconhecimento de padrões numéricos através da transformada karhuen-loève. *VII SIBGRAPI-Curitiba*, pages 229-234, 1994.
- [MF95] J.Fernando Marar and E.C.B.C. Filho. Classificação de assinaturas off-line baseadas em aproximadores universais de funções com extração de características através de wavelets. *II Simpósio Brasileiro de Redes Neurais- São Carlos-SP*, pages 09-14, 1995.
- [MFV96] J.Fernando Marar, E.C.B.Carvalho Filho, and G.C. Vasconcelos. Function approximation by polynomial wavelets generated from powers of sigmoids. *SPIE-Aerosense/96- 10th Annual International Aerosense Symposium*, 2762- Wavelet Application III:365-374, 1996.
- [MM92] J.Fernando Marar and E.S. Moreira. Utilização da transformada kahunen-loève em síntese de tons musicais. Master's thesis, ICMSC-USP, 1992.
- [Mor89] E.S. Moreira. *The Design of an Arithmetic Unit for Digital Signal Processing Systems*. PhD thesis, University of Manchester, 1989.
- [Mur93] S. Muraki. Volume data and wavelet transform. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pages 50-56, 1993.
- [OS75] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall International Inc., London, 1975.
- [PFTV92] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [PK93] Y.C. Pati and P.S. Krishnaprasad. Analysis and synthesis of feedforward neural networks using discrete affine wavelet transformations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4:73-85, January 1993.
- [Ros84] A. Rosenfeld. *Multiresolution image processing and analysis*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [SG92] B. Soucek and The IRIS Group. *Fast Learning and Invariant Object Recognition: The sixth-Generation Breakthrough*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1992.
- [STK92] Harold Szu, Brian Telfer, and Shubha Kadambe. Neural network adaptive wavelets for signal representation and classification. *Optical Engineering*, 31:1907-1916, September 1992.
- [VTG94] L. Velho, D. Terzopoulos, and J.M. Gomes. Multiscale implicit models. *VII SIBGRAPI - Curitiba-PR*, pages 93-100, 1994.
- [ZB92] Qinghua Zhang and Albert Benveniste. Wavelet networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3:889-898, November 1992.