

# Inclusão de Injunções Epipolares na Solução do Problema de Correspondência

MAURICIO GALO<sup>I</sup>  
CLÉSIO LUIS TOZZI<sup>II</sup>

<sup>I</sup>UNESP - Universidade Estadual Paulista  
FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Cartografia  
Rua Roberto Simonsen 305, CP 957, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil  
Atualmente como pós-graduando no DCA, FEEC, UNICAMP, Campinas  
galo@dca.fee.unicamp.br; ueppr@eu.ansp.br

<sup>II</sup>UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas  
FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
DCA - Dept. de Engenharia da Computação e Automação Industrial  
Caixa Postal 6101, 13083-970 Campinas, SP, Brasil  
clesio@dca.fee.unicamp.br

**Abstract:** An approach that includes epipolar constraints for solving the feature-based matching problem is presented. In this paper only point features are considered and the epipolar constraint is included in the relaxation labeling process, based on the epipolar geometry. The proposed approach was applied on simulated images and the obtained results show an increment in the number of labeled pairs and a decrease on the number of false labeled pairs.

**Keywords:** Reconstruction, Stereo, Matching, Epipolar Geometry, Relaxation.

## 1 Introdução

A solução do problema de correspondência, ou *matching*, é fundamental em Fotogrametria e Visão Computacional, pois aplicações como a reconstrução de superfícies por algoritmos estéreo [JAIN *et al.*, 1995; LEBERL *et al.*, 1996], a determinação do fluxo óptico [WU, 1995], a determinação de movimento no espaço 3D a partir de uma seqüência de imagens e do fluxo óptico [MITICHE, 1988]; a geração de modelos digitais de terreno [HEIPKE, 1996; LO, 1996], dependem da determinação da posição de feições homólogas sobre duas ou mais imagens.

Segundo ZHANG *et al.* [1994] os algoritmos para a solução do *matching* podem ser classificados em duas categorias: *matching* baseado em áreas (*template matching* ou *area-based matching*) e o *matching* baseados em feições<sup>1</sup> (*feature-based matching*). No *matching* baseado em áreas, os algoritmos correlacionam os níveis de cinza dentro de janelas e no *matching* baseados em feições é feita a extração de primitivas e posterior determinação das correspondências através de técnicas de busca em árvores, relaxação, etc.

A diversidade de técnicas utilizadas para solucionar o problema de *matching* é um indicativo de

sua complexidade. A existência de oclusão, ruídos e ambigüidades (provocadas por padrões repetitivos e objetos transparentes) nas imagens, torna o processo de *matching* um problema mal-condicionado [HEIPKE, 1996]. Com a finalidade de minimizar o efeito deste mal-condicionamento, o uso de estratégias como processamento hierárquico e a inclusão de injunções epipolares são sugeridas [HEIPKE, 1996; LEBERL *et al.*, 1996]. O uso destas estratégias contemplam as necessidades apontadas por DHOND *et al.* [1989], que sugerem a inclusão de melhorias nos algoritmos de *matching* a fim de que o número de falsas correspondências seja minimizado.

No sentido de contribuir para a minimização do efeito provocado por este mal-condicionamento e na tentativa de reduzir o número de falsas correspondências, apresenta-se neste trabalho um procedimento para a solução do problema de *matching* de pontos, que inclui a injunção epipolar no algoritmo de rotulação por relaxação. A injunção epipolar é considerada tanto no cálculo das similaridades, quanto no cálculo das compatibilidades. No cálculo das similaridades a injunção epipolar é considerada juntamente com o coeficiente de correlação cruzado, a magnitude do gradiente e a intensidade média.

Para a aplicação da injunção epipolar, como é proposto neste trabalho, supõe-se o conhecimento da matriz fundamental (F), obtida a partir dos parâmetros

---

<sup>1</sup> Termos como características e atributos, por exemplo, também podem ser utilizados.

intrínsecos das câmaras e da orientação relativa (OR) entre as mesmas. Para aplicações onde não se dispõe dos parâmetros de OR, uma estimativa desta matriz pode ser obtida considerando os resultados intermediários da rotulação sem essas injunções. Esta estimativa pode ser melhorada sucessivamente uma vez que o aumento do grau de confiabilidade na determinação dos pontos homólogos deve permitir a convergência do processo para a verdadeira orientação relativa das câmaras.

Neste trabalho a orientação relativa das câmaras é considerada conhecida. Os aspectos relacionados com a determinação ou estimativa da orientação das câmaras (calibração das câmaras), embora discutidos neste trabalho, não são aprofundados visto que o objetivo primordial é apresentação de uma metodologia para inclusão da injunção epipolar no processo de *matching* por relaxação.

Este artigo está estruturado do seguinte modo: na seção 2 são apresentados conceitos sobre o procedimento de rotulação por relaxação; na seção 3 são feitas sugestões para o cálculo das similaridades e compatibilidades; na seção 4 são apresentados conceitos relacionados a geometria epipolar; na seção 5 são feitas considerações sobre a inclusão da injunção epipolar; na seção 6 são apresentados os experimentos realizados, bem como a análise dos resultados; e finalmente, na seção 7 são apresentadas as considerações finais e conclusões.

## 2 Rotulação por Relaxação

O procedimento de *matching*, consiste na determinação da correspondência entre dois conjuntos de objetos, podendo-se considerar “objetos” como sendo pontos, feições lineares, etc.

Para a apresentação do procedimento de rotulação por relaxação serão considerados duas imagens e um conjunto de objetos para cada uma delas. Para as imagens 1 e 2 serão considerados  $m$  e  $n$  objetos, respectivamente, sendo estes objetos representados do seguinte modo:

$$M = \{M_1, \dots, M_i, \dots, M_m\}, \\ S = \{S_1, \dots, S_j, \dots, S_n\}.$$

O resultado do procedimento de rotulação é uma lista de pares  $(M_i, S_j)$ , com  $i = \{1, \dots, m\}$  e  $j = \{1, \dots, n\}$ , na qual o elemento  $S_j$  corresponde ao elemento  $M_i$ , podendo-se dizer que  $j$  é o rótulo de um objeto de  $S$  que corresponde ao objeto  $i$  de  $M$ , ou ainda,  $j$  é o rótulo associado ao objeto  $i$ . No caso em que nenhuma correspondência é encontrada tem-se uma correspondência NULA.

Para cada objeto  $M_i$  de  $M$  tem-se  $n$  candidatos da segunda imagem e a cada par  $(M_i, S_j)$  pode-se associar

uma grandeza que mede a similaridade entre os objetos  $i$  e  $j$ , das imagens 1 e 2 respectivamente. Esta medida de similaridade será representada por  $p_{ij}$  e pode ser calculada por:

$$p_{ij} = \frac{k_i}{1 + \alpha d_{ij}} \quad (2.0)$$

onde:  $k_i$  é uma constante de normalização,  $\alpha$  é uma constante positiva e  $d_{ij}$  é uma medida de “distância” envolvendo  $i$  e  $j$ . Como discutido na seqüência deste trabalho, esta medida pode ser calculada de diferentes maneiras, mas quanto menor for a distância  $d_{ij}$ , maior deve ser o nível de similaridade  $p_{ij}$  [FAUGERAS, 1993].

A constante  $k_i$  pode ser arbitrada de diversos modos. Se, por exemplo, a condição

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (2.1)$$

for considerada, com  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ ,  $k_i$  deve ser calculado por:

$$k_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \alpha d_{ij}}. \quad (2.2)$$

Pode-se observar que a condição  $0 \leq p_{ij} \leq 1$ , juntamente com a condição expressa pela Eq. (2.1), permite que  $p_{ij}$  seja interpretado como probabilidade [SCHALKOFF, 1989; JAIN *et al.*, 1995].

Para o caso em que se considera feições pontuais como objetos, pode-se utilizar, por exemplo, o coeficiente de correlação cruzado (*CCC - Cross-correlation coefficient*) no cálculo das similaridades [JAIN *et al.*, 1995; WU, 1995]. Considerando janelas de tamanho  $W \times W$  (com  $W$  ímpar), centradas nos pixels  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$ , das imagens 1 e 2, respectivamente, este coeficiente pode ser calculado por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_u \sum_v (I_1(x_i + u, y_i + v) - \bar{I}_1)(I_2(x_j + u, y_j + v) - \bar{I}_2)}{\sqrt{\sum_u \sum_v (I_1(x_i + u, y_i + v) - \bar{I}_1)^2} \sqrt{\sum_u \sum_v (I_2(x_j + u, y_j + v) - \bar{I}_2)^2}} \quad (2.3)$$

onde:  $u$  e  $v$  variam no intervalo  $\{(1-W)/2, \dots, (W-1)/2\}$ ;  $I_1$  e  $I_2$  representam a intensidade dos pixels considerados nas imagens 1 e 2; e  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  representam a intensidade média para as janelas centradas nos pontos  $i$  e  $j$ , respectivamente.

A Eq. (2.3) expressa uma das formas de cálculo de  $p_{ij}$  para o caso de feições pontuais. Outras técnicas podem considerar para o cálculo de  $d_{ij}$  a diferença de intensidade média e a diferença na magnitude do gradiente, em torno de cada ponto ( $i$  e  $j$ ), e o posterior cálculo de  $p_{ij}$  pela Eq. (2.0). No cálculo das similaridades, como apresentado acima, considera-se os pixels  $i$  e  $j$ , das imagens 1 e 2, respectivamente, bem

como uma janela  $W \times W$  em torno de cada elemento do par candidato  $(i,j)$ . Pode-se dizer que o coeficiente de similaridade permite uma avaliação puntual da correspondência, pois os vizinhos dos objetos  $i$  e  $j$  nos conjuntos  $M$  e  $N$ , respectivamente, não são considerados.

Com a finalidade de considerar esta vizinhança é utilizada uma medida de compatibilidade envolvendo os candidatos. Esta medida pode ser considerada como uma medida de isomorfismo entre os nos  $i$  e  $j$ , se os objetos de interesse forem representados numa estrutura tipo grafo.

A função utilizada para medir a compatibilidade é dependente da aplicação, mas em todas aplicações uma certa vizinhança em torno de  $i$  e  $j$  deve ser considerada. Designando por  $i'$  e  $j'$  os vizinhos genéricos de  $i$  e  $j$ , respectivamente, o coeficiente de compatibilidade (ou medida de consistência) entre  $i$  e  $j$ , considerando os vizinhos  $(i',j')$ , pode ser representado por  $c(i,j;i',j')$ , ou de modo mais compacto, por  $c(i,j)$ .

Este coeficiente pode ser determinado de modo similar a  $p_{ij}$  e se a relação entre  $i$  e seu vizinho  $i'$  for similar a relação entre  $j$  e seu vizinho  $j'$ , o coeficiente de compatibilidade deve ser próximo de 1, caso contrário  $c(i,j;i',j')$  deve ser próximo de zero [FAUGERAS, 1993].

Para um determinado par candidato ao *matching*, se ambos os coeficientes  $p_{i'j'}$  e  $c(i,j;i',j')$  forem próximos de 1, o produto  $p_{i'j'} c(i,j;i',j')$  será próximo de 1, mas se apenas um deles ( $p_{i'j'}$  ou  $c(i,j;i',j')$ ) for zero, ou próximo de zero, o produto indicará que  $j$  não é rótulo do objeto  $i$ , ou melhor, que o *matching* entre  $i$  e  $j$  é incompatível com a “estrutura” gerada pelos objetos ao redor de  $i$  e  $j$ . No caso em que este produto assume um valor próximo de 1, o *matching* entre  $i$  e  $j$  é reforçado. Deste modo, considerando  $V_i(j)$  como o conjunto de objetos vizinhos de  $i(j)$ , a grandeza  $q_{ij}$ , definida por:

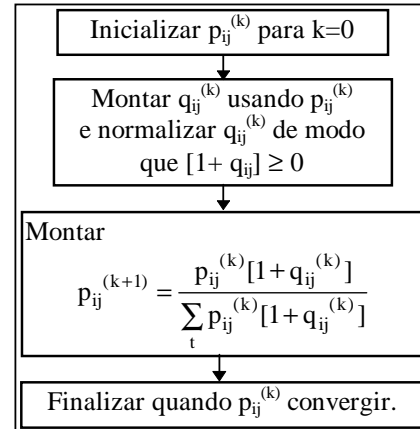
$$q_{ij} = \sum_{i' \in V_i; j' \in V_j} c(i,j;i',j') \cdot p_{i'j'} \quad (2.4)$$

pode ser calculada para cada par  $(i,j)$ . Esta grandeza é conhecida como suporte do rótulo  $j$  ao objeto  $i$  [SCHALKOFF, 1989] e pode ser utilizada para atualizar as similaridades iniciais num procedimento iterativo denominado “rotulação por relaxação”.

SCHALKOFF [1989] apresenta uma formulação para o algoritmo de rotulação por relaxação a partir da solução proposta por ROSENFELD *et al.* [1976, *apud* SCHALKOFF, 1989]. Esta formulação é composta de 4 fases como mostra o fluxograma da Fig. 1.

Como critério de convergência para o procedimento apresentado na Fig. 1, pode se usar, por exemplo, a comparação da média das diferenças, em

valor absoluto, de  $p_{ij}^{(k)}$  e  $p_{ij}^{(k+1)}$ , com um limiar pré estabelecido, como proposto por WU [1985].



**Fig. 1:** Fluxograma para o algoritmo de relaxação, adaptado de SCHALKOFF [1989].

### 3 Uma Proposta para o Cálculo das Similaridades e Compatibilidades

As funções para o cálculo das similaridades e compatibilidades dependem do tipo de objeto considerado e da aplicação, e um fator importante neste processo é a escolha de uma “boa” medida de distância ( $d_{ij}$  na Eq. (2.0)).

Como citado na seção anterior, pode-se considerar para o cálculo de  $p_{ij}$  o coeficiente de correlação cruzado (Eq. (2.3)); a diferença entre a magnitude do gradiente; a diferença de intensidade média em torno das janelas centradas em cada um dos pontos do par  $(i,j)$ , etc. Em [GALO, 1996] utiliza-se uma função para o cálculo das similaridades iniciais na qual estes três elementos são considerados simultaneamente, da seguinte forma:

$$p_{ij}^{(0)} = p_{ij}^{CC} \cdot p_{ij}^{Grad} \cdot p_{ij}^{Int}, \quad (3.0)$$

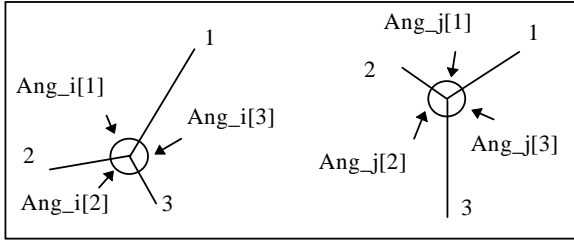
onde  $p_{ij}^{CC}$  é calculado pela Eq. (2.3) e  $p_{ij}^{Grad}$  e  $p_{ij}^{Int}$  são funções na forma da Eq. (2.0) na qual os valores de  $d_{ij}$  são calculados em função da diferença de magnitude do gradiente e da diferença entre as intensidades médias, respectivamente.

Deste modo, a similaridade inicial será alta se as três funções (na Eq. (3.0)) resultarem em valores de similaridades altas. A influência de cada um dos termos envolvidos na Eq. (3.0) pode ser modificada através da alteração da respectiva constante  $\alpha$  (Eq. (2.0)).

O cálculo da compatibilidade para cada par  $(i,j)$  deve ser feito considerando a vizinhança de  $i$  e de  $j$  (nos conjuntos  $M$  e  $N$ , respectivamente). Em [GALO, 1996] considerou-se relações angulares e de distância no cálculo das compatibilidades.

Designando por  $NV$  o número de vizinhos desejados em torno dos pontos  $i$  e  $j$ , determina-se

inicialmente os NV pontos mais próximos a i e a j. De posse destes NV pontos mais próximos a i e j, pode-se ordena-los em função dos ângulos formados entre a linha horizontal (eixo x) e cada um dos segmentos de reta que conectam i(j) a seus vizinhos. Ordenados os NV vizinhos em função destes ângulos, pode-se calcular os ângulos entre os vizinhos consecutivos, como mostra a Fig. 2.



**Fig.2:** Ângulos entre os pontos vizinhos, considerando i e j como pontos centrais.

De posse dos ângulos  $Ang\_i[k]$ ,  $Ang\_j[k]$  (com  $k=\{1,\dots,NV\}$ ), em torno de i e j, respectivamente, pode-se calcular a seguinte função:

$$d_{ij}^{Ang}[\Delta] = \left| NV - \sum_{k=1}^{NV} \frac{Ang\_j[k+\Delta]}{Ang\_i[k]} \right| \quad (3.1)^2$$

onde  $\Delta$  é uma variável que assume valores de 0 a  $NV-1$ , e que faz o “deslocamento cíclico” dos ângulos armazenados em  $Ang\_j$ . Calculados os NV valores de  $d_{ij}^{Ang}$ , a partir do resultado da Eq. (3.1), deve-se utilizar o valor mínimo de  $d_{ij}^{Ang}$  como elemento no cálculo da compatibilidade, ou seja:

$$c_{ij}^{Ang} = \frac{1}{1 + \alpha_{Ang} d_{ij}^{Ang}[\Delta]_{MIN}} \quad (3.2)$$

O valor de  $\Delta$  que fornece o mínimo da Eq. (3.1) corresponde ao número de “deslocamentos” que deve ser dado nos ângulos ao redor de j para ser ter o “melhor” *matching*. Os ângulos ao redor dos pontos homólogos para duas imagens tomadas de perspectivas diferentes não são invariantes, e a idéia é associar às configurações mais “semelhantes”, um valor maior de compatibilidade.

Para o cálculo da compatibilidade considerando distâncias, pode-se considerar os mesmos vizinhos definidos anteriormente e a formulação proposta por [ZHANG *et al.*, 1994], por exemplo.

Como as funções apresentadas para o cálculo das compatibilidades envolvem mais de um par de vizinhos, simultaneamente, o termo  $c(i,j;i',j')$  da Eq. (2.4) deve se

<sup>2</sup> Se  $(k+\Delta) > NV \Rightarrow (k+\Delta) \leftarrow (k+\Delta-NV)$ .

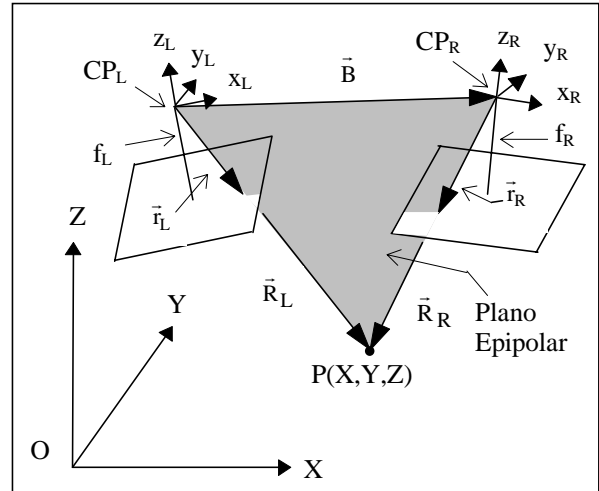
<sup>3</sup> Para evitar falsos mínimos pode-se também utilizar outra equação na qual se tenha a razão  $(Ang\_j[k+\Delta]/Ang\_i[k])^{-1}$ .

modificado. Deste modo o suporte pode ser calculado por:

$$q_{ij} = \sum_{i' \in Vi; j' \in Vj} c(i',j') p_{i'j'} \quad (3.3)$$

#### 4 Geometria Epipolar e a Condição de Coplanaridade

Considerando um par de fotos, tomadas de pontos arbitrários (Fig. 3), pode-se definir os elementos que caracterizam a geometria epipolar. O sistema do espaço objeto é um sistema de coordenadas ortogonal dextrogiro com origem (O) e eixos (X,Y,Z). Os sistemas de coordenadas do espaço imagem  $(x_L, y_L, z_L)$  e  $(x_R, y_R, z_R)$  tem origem nos centros perspectivos (CP) das câmaras esquerda e direita, respectivamente, sendo que o eixo x tem a direção da linha horizontal (linha de varredura), o eixo z tem a direção do eixo óptico e o eixo y é definido de modo que o sistema seja dextrogiro, como ilustra a Fig. 3.



**Fig.3:** Um par de imagens, os sistemas de coordenadas e o plano epipolar.

A partir dos dois CP's e do ponto  $P(X,Y,Z)$  do espaço objeto pode-se determinar os vetores  $\vec{r}_L$  e  $\vec{r}_R$ . Como consequência da geometria descrita, os vetores  $\vec{r}_L$ ,  $\vec{r}_R$ , e  $\vec{B}$  (vetor que liga os CP's) são coplanares e o plano que contém estes vetores é denominado plano epipolar. A interseção do plano epipolar com os planos imagens determinam duas retas, designadas por linhas epipolares conjugadas. A importância das linhas epipolares para o procedimento de *matching* se deve ao fato de que dado um ponto numa das imagens, o ponto homólogo na outra imagem se localiza sobre a linha epipolar conjugada.

A coplanaridade de três vetores pode ser determinada através do produto triplo (ou misto) destes mesmos vetores. Considerando os vetores:  $\vec{a} (a_x, a_y, a_z)$ ,

$\vec{b} (b_x, b_y, b_z)$  e  $\vec{c} (c_x, c_y, c_z)$ , o produto misto entre eles pode ser calculado por:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.0)$$

O resultado do produto misto é um escalar, cuja interpretação geométrica é a do volume de um paralelepípedo, na qual as arestas são determinadas pelos vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  [KREYSZIG, 1993]. Se os vetores considerados forem coplanares, o volume deste paralelepípedo se reduz a zero. Considerando os vetores  $\vec{B} (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{R}_L (R_{Lx}, R_{Ly}, R_{Lz})$  e  $\vec{R}_R (R_{Rx}, R_{Ry}, R_{Rz})$  e lembrando que eles são coplanares, pode-se estabelecer a seguinte equação:

$$\vec{B} \cdot (\vec{R}_L \times \vec{R}_R) = 0 \quad (4.1)$$

Para o desenvolvimento da Eq. (4.1) é necessário expressar seus elementos em função de grandezas mensuráveis, como por exemplo as coordenadas no sistema de imagem. Designando por  $(x'_L, y'_L)$  e  $(x'_R, y'_R)$  as coordenadas de dois pontos imagem homólogos, expressas em relação ao centro da imagem, pode-se escrever os seguintes vetores:

$$\vec{r}_{\{L,R\}} = \begin{bmatrix} x'_{\{L,R\}} - x_0 \\ y'_{\{L,R\}} - y_0 \\ -f_{\{L,R\}} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $f$  é a distância focal das câmaras e  $(x_0, y_0)$  é a posição do ponto principal<sup>4</sup> em relação ao centro da imagem [LUGNANI, 1987]. Os vetores  $\vec{r}_L$  e  $\vec{r}_R$  (ver Fig. 3) tem origem nos CP's esquerdo e direito e tem extremidades nos pontos homólogos. É importante notar que estes vetores estão expressos no sistema do espaço imagem. Por outro lado os vetores  $\vec{R}_L$  e  $\vec{R}_R$  podem ser expressos no sistema do espaço objeto por:

$$\vec{R}_{\{L,R\}} = \begin{bmatrix} X - X_{cp\{L,R\}} \\ Y - Y_{cp\{L,R\}} \\ Z - Z_{cp\{L,R\}} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde  $(X, Y, Z)$  são as coordenadas de  $P$  e  $(X_{cp}, Y_{cp}, Z_{cp})_{\{L,R\}}$  são as coordenadas dos CP's.

Os vetores  $\vec{R}_L$ ,  $\vec{R}_R$ , descritos no referencial do espaço objeto, e os vetores  $\vec{r}_L$  e  $\vec{r}_R$ , descritos no referencial do espaço imagem, podem ser relacionados, desde que sejam conhecidos os ângulos em torno dos eixos  $X$  (ângulo  $\omega$ ),  $Y$  (ângulo  $\phi$ ) e  $Z$  (ângulo  $\kappa$ ) que tornam os sistemas referenciais do espaço imagem, paralelos ao sistema referencial do espaço objeto. Representando por  $M_{\{L,R\}}$  as matrizes de rotação,

calculadas em função dos ângulos  $\kappa_{\{L,R\}}$ ,  $\phi_{\{L,R\}}$  e  $\omega_{\{L,R\}}$  [LUGNANI, 1987; JAIN *et al.*, 1995], e por  $k_{\{L,R\}}$  os fatores de escala entre os vetores  $\vec{r}_{\{L,R\}}$  e  $\vec{R}_{\{L,R\}}$  pode-se escrever:

$$\vec{r}_{\{L,R\}} = k_{\{L,R\}} M_{\{L,R\}} \vec{R}_{\{L,R\}} \quad (4.4)$$

Escrevendo os vetores  $\vec{R}_L$  e  $\vec{R}_R$  como função de  $\vec{r}_L$ ,  $\vec{r}_R$ ,  $k_{\{L,R\}}$  e  $M_{\{L,R\}}$  pela Eq. (4.4), aplicando-os na Eq. (4.1) e considerando a Eq. (4.2), a condição de coplanaridade pode ser escrita por:

$$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{k_L} M_L^{-1} \begin{bmatrix} x'_L - x_0 \\ y'_L - y_0 \\ -f_L \end{bmatrix} \right) \times \left( \frac{1}{k_R} M_R^{-1} \begin{bmatrix} x'_R - x_0 \\ y'_R - y_0 \\ -f_R \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.5)$$

#### 4.1 Matrizes Fundamental e Essencial

Desenvolvendo a Eq. (4.5) pode-se chegar a equação:

$$\mathbf{x}_L^t I_L^t M_L K_B M_R^t I_R \mathbf{x}_R = 0 \quad (4.6)$$

onde:  $\mathbf{x}_{\{L,R\}} = [x'_{\{L,R\}} \quad y'_{\{L,R\}} \quad 1]^t$ ;  $I_{\{L,R\}}$  são as matrizes que contém os parâmetros intrínsecos  $x_0$ ,  $y_0$ , e  $f$ :

$$I_{\{L,R\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & -f \end{bmatrix}_{\{L,R\}}; \quad (4.7)$$

$M_{\{L,R\}}$  são as matrizes de rotação; e  $K_B$  é uma matriz anti-simétrica formada pelas componentes do vetor de base:

$$K_B = \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A fim de dar uma representação compacta à Eq. (4.6) pode-se agrupar algumas matrizes, formando assim as matrizes essencial (E) e fundamental (F) [BARAKAT *et al.*, 1994]. A matriz essencial é expressa por:

$$E = M_L K_B M_R^t \quad (4.9)$$

e a matriz fundamental por:

$$F = I_L^t E I_R. \quad (4.10)$$

Deste modo a condição de coplanaridade envolvendo os pontos homólogos  $(x'_L, y'_L)$  e  $(x'_R, y'_R)$  e os CP's toma a forma:

$$\mathbf{x}_L^t F \mathbf{x}_R = 0. \quad (4.11)$$

#### 5 Inclusão das Injunções Epipolares

Considerando um ponto  $i$  na imagem esquerda ( $Img_E$ ) e os dois CP's, pode-se determinar o plano epipolar que contém  $i$ . A interseção deste plano com o plano da

<sup>4</sup> Projecção do CP no plano imagem.

imagem direita ( $\text{Img}_D$ ) determinará uma linha epipolar, designada por  $e_R(i)$ . A partir da reta  $e_R(i)$  o seguinte conjunto pode ser definido:

$$H_i = \{ \forall j \in \text{Img}_D \mid j \in e_R(i) \}$$

Como pode-se notar,  $H_i$  é composto pelos pontos de  $\text{Img}_D$  que estão sobre a linha epipolar  $e_R(i)$ .

Adotando a convenção anterior e assumindo que a matriz fundamental é conhecida e que um ponto da imagem esquerda é fornecido ( $i=\mathbf{x}_L$ ), pode-se aplicar a Eq. (4.11) para cada um dos pontos da imagem direita ( $j=\mathbf{x}_R$ ).

A interpretação geométrica do escalar resultante da Eq. (4.11) é o volume do paralelepípedo ( $\text{VP}_{ij}$ ) definido pelos vetores  $\bar{r}_L, \bar{r}_R, \bar{b}$ , quando suas origens são coincidentes. Se estes vetores forem coplanares, o volume se reduz a zero e dependendo do ponto considerado na imagem direita, os seguintes resultados são possíveis:

$$\text{VP}_{ij} = \left| \mathbf{x}_L^t \mathbf{F} \mathbf{x}_R \right| = \chi(\mathbf{F}, i, j) \begin{cases} \text{VP}_{ij} = 0, & \text{se } j \in H_i \\ \text{VP}_{ij} \neq 0, & \text{se } j \notin H_i \end{cases} \quad (5.0)$$

Desta forma, o volume resultante ( $\text{VP}_{ij}$ ) pode ser associado à medida  $d_{ij}$  no cálculo das similaridades. O valor de similaridade, calculado em função do volume  $\text{VP}_{ij}$ , será designado por  $p_{ij}^{\text{epi}}$ , e deve ser maior, quanto menor for o volume do paralelepípedo. Assim sendo, a similaridade para o par  $(i,j)$  pode ser calculada por:

$$p_{ij}^{\text{epi}} = \frac{1}{1 + \alpha_{\text{epi}} \cdot \chi(\mathbf{F}, i, j)} \quad (5.1)$$

e pode ser considerada no cálculo das similaridades iniciais (Eq. 3.0).

No cálculo das compatibilidades, pode-se utilizar, além das relações angulares e de distância, os volumes dos paralelepípedos. Considerando como NV o número de vizinhos dos pontos  $i$  e  $j$ , a soma dos volumes dos NV paralelepípedos, definidos para cada par vizinho  $(i',j')$ , podem ser utilizados no cálculo da compatibilidade, do seguinte modo:

$$c_{ij}^{\text{epi}} = \frac{1}{1 + \alpha_{\text{epi}} \sum_{i' \in V_i; j' \in V_j} \chi(\mathbf{F}, i', j')} \quad (5.2)$$

### 5.1 Considerações Sobre a Orientação Relativa das Câmaras

Na seção 3 foram apresentadas funções para o cálculo das similaridades e compatibilidades e nestas funções não levou-se em conta nenhuma restrição relacionada à geometria do processo de aquisição das imagens. Já na seção 5 foram apresentadas as funções para os cálculos das similaridades e compatibilidades, considerando a injunção epipolar.

Para os cálculos das similaridade e compatibilidades, como proposto na seção anterior, é necessário o conhecimento dos parâmetros intrínsecos e de OR da câmara. Duas são as situações para este caso. A primeira na qual os parâmetros intrínsecos e de OR são conhecidos através da calibração e a segunda, na qual não se conhece os elementos de OR.

No primeiro caso a matriz fundamental pode ser diretamente determinada mas no segundo caso não. Neste último caso propõem-se os seguintes passos para a determinação dos parâmetros de OR:

- Passo 1) Realizar o *matching* utilizando as funções apresentadas na seção 3;
- Passo 2) Estimar a OR das câmaras;
- Passo 3) Estimar a matriz fundamental;
- Passo 4) Realizar o *matching*, incluindo as injunções epipolares;
- Passo 5) Estimar a OR das câmaras;
- Passo 6) Parâmetros de OR estáveis?
  - se Sim --> Fim.
  - se Não --> Passo 3.

Ao término deste procedimento tem-se uma relação de correspondências bem como os elementos de orientação relativa do par de câmaras.

## 6 Experimentos Realizados

Para testar o efeito das injunções epipolares no *matching* de pontos, comparou-se os resultados da aplicação deste algoritmo (incluindo-se as injunções epipolares) com os resultados da utilização do procedimento sem a inclusão das injunções epipolares.

No caso do algoritmo onde foram incluídas as injunções epipolares adotou-se um procedimento para a eliminação de falsos pares. De posse dos pontos rotulados como pares, pode-se determinar a distância entre  $\bar{r}_L$  e  $\bar{r}_R$ . Em função desta distância, os falsos pares podem ser eliminados e o algoritmo pode ser repetido até que nenhum novo par de pontos seja assinalado como correspondente.

### 6.1 Geração das Imagens e Seleção dos Pontos de Interesse

As imagens utilizadas nos experimentos foram simuladas e foram geradas pelo *software* POV-RAY [YOUNG *et al.*, 1996], com os parâmetros mostrados na Tab. 1.

Para a realização do *matching* é necessário a prévia seleção dos pontos de interesse. Neste trabalho fez-se a seleção dos pontos de modo manual. Para a seleção automática pode-se utilizar, por exemplo, o operador de

MORAVEC [MORAVEC, 1977] ou o operador SUSAN [SMITH *et al.*, 1995].

**Tabela 1:** Imagens geradas, os parâmetros da câmara e o número de pontos de interesse (PI) selecionados.

Imagens	f	$\kappa \phi \omega(^{\circ})$	(X,Y,Z)cp	Núm. de PI
sibe	1	0, 0, 0	4, 4, 12	56
sibd	1	0, 0, 0	6, 4, 12	53
sib7e	1	0, -7, 0	3, 4, 12	56
sib7d	1	0, 7, 0	7, 4, 12	58
sib14e	1	0,-14, 0	2, 4, 12	54
sib14d	1	0, 14, 0	9, 4, 12	56

( $x_0, y_0$ )=(0,0), Dimensão das imagens: 320(h)x240(v).

## 6.2 Apresentação e Discussão dos Resultados

A fim de avaliar o efeito das injunções epipolares foram realizados experimentos nos quais utilizou-se diferentes tamanhos de janelas, diferentes números de vizinhos, diferentes limites de convergência e diferentes constantes ( $\alpha$  na Eq. (2.0)). Os resultados foram analisados comparando a porcentagem de pares rotulados (PR) e a porcentagem de falsos pares (FP). O valor de PR foi calculado pela relação: número de pares rotulados/número máximo de pares possíveis e FP foi calculado pela relação entre o número de falsos pares/número de pares rotulados.

A Fig. 4 mostra um par de imagens, onde aparecem os pontos de interesse (pequenos quadrados brancos) e os pontos assinalados como correspondentes (cruzes brancas) para um dos testes realizados com as imagens sib14e e sib14d (imagens mais convergentes).

A tabela 2 mostra o resumo dos resultados dos experimentos realizados, onde são mostrados os valores médios para as porcentagens de pares rotulados e falsos pares.

**Tabela 2:** Porcentagem de pares rotulados (PR) e de falsos pares (FP).

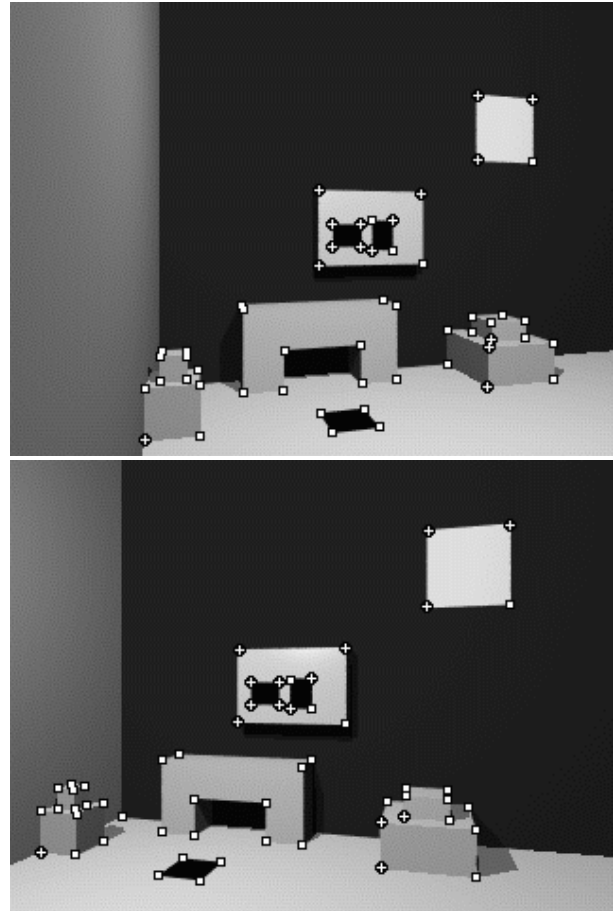
Pares de imagens consideradas	Testes sem inj. epipolares		Testes com inj. epipolares	
	PR(%)	FP(%)	PR(%)	FP(%)
sib14e sib14d	23,7	17,8	30,9	4,7
sib7e sib7d	35,3	5,3	53,1	1,1
sibe sibd	46,0	1,1	41,9	2,2

Pode-se observar pelos resultados apresentados na Tab. 2 que no caso das imagens onde os eixo óticos

estão paralelos (sibe e sibd), a porcentagem de pares rotulados (PR) e de falsos pares (FP) são próximas.

Para as imagens onde a convergência é maior, a porcentagem de pares rotulados (PR) é maior, quando as injunções epipolares são consideradas. Além disso, quando são utilizadas imagens onde a convergência é maior observa-se que a inclusão de injunções epipolares diminui a porcentagem de falsos pares (FP), quando comparado com os testes onde estas injunções não são consideradas.

Uma possível justificativa para estas observações pode ser atribuída ao fato de que nas configurações com pequena convergência, o cálculo das compatibilidades a partir de relações angulares e de distância é mais eficiente do que em situações com maior convergência, onde a perspectiva é mais afetada. Neste caso (em convergências maiores) o uso de injunções epipolares tem um efeito importante na diminuição do número de falsas correspondências.



**Fig. 4:** Imagens sibe14e (superior) e sib14d (inferior), com 16 pares rotulados a partir do algoritmo na qual a injunção epipolar é incluída.

## 7 Considerações Finais e Conclusões

Este trabalho teve o propósito de apresentar uma forma de inclusão de injunções epipolares no algoritmo de rotulação por relaxação para a solução do problema de *matching* de pontos.

A inclusão destas injunções são feitas a partir de medidas de similaridade e compatibilidade, obtidas em função do volume do paralelepípedo definido por três vetores (ver seção 5). Para o cálculo do volume de cada paralelepípedo utiliza-se a condição de coplanaridade envolvendo os pares candidatos.

Embora, nos testes realizados, os parâmetros intrínsecos e de OR tenham sido considerados conhecidos, o procedimento proposto pode ser utilizado juntamente com a obtenção dos parâmetros de OR num processo iterativo, como sugerido na seção 5.

Os testes apresentados foram realizados com imagens simuladas e os resultados mostrados neste trabalho indicam um aumento da proporção de pares rotulados com a inclusão de injunções epipolares, para imagens convergentes. Observa-se, também, que a diminuição do número de falsos pares foi maior para as configurações mais críticas, ou seja, onde os eixos óticos apresentam maior convergência. Esta consideração é importante para a solução de problemas em aplicações que envolvem curtas distâncias, como observado em visão por computador e em Fotogrametria a curta distância.

As conclusões apresentadas são baseadas nos experimentos realizados. Sua generalização para uma gama maior de imagens demanda uma avaliação considerando: um número maior de imagens e o uso de imagens reais e de maior complexidade.

## Referências

BARAKAT, H.; DOUCETTE, P.; MIKHAIL, E.; "Photogrammetric Analysis of Image Invariance", *ISPRS-Commission III-Spatial Information from Digital Photogrammetry and Computer Vision*, Munich, Germany, September 5-9, p. 25-34, 1994.

DHOND, U. R.; AGGARWAL, J. K.; "Structure from stereo - A review", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 19, n. 6, November/December, p. 1489-1510, 1989.

FAUGERAS, O.; *Three-Dimensional Computer Vision - A Geometric Viewpoint*, The MIT press, Cambridge, England, 1993.

GALO, M.; "Reconstruction of 3D geometry from 2D images: point-matching using relaxation labeling", ProBrAl project 002/94 CAPES/CNpQ - UNICAMP/THD-GRIS, Darmstadt, Germany, 1996.

GHOSH, S. K.; *Analytical Photogrammetry*; Pergamon Press, Canada, 1987.

HEIPKE, C.; "Overview of Image Matching Techniques", *OEEPE - Workshop on the application of digital photogrammetric workstations*, Lausanne, Switzerland, March 4-7, 1996.

JAIN, R.; KASTURI, R.; SCHUNCK, B. G.; *Machine Vision*, McGraw-Hill International Editions, Computer Science Series, 1995.

KREYSZIG, E.; *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1993.

LEBERL, F.; GRUBER, M.; KELLERER-PIRKLBAUER, PINZ, A.; URAY, P.; PAAR, G.; "Surface Reconstruction", *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, v. XXXI, Part B3, p. 421-428, Vienna, 1996.

LO, K. C.; "Linear Feature Extraction By String Matching For Automatic DEM Generation", *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, v. XXXI, Part B3, p. 472-477, Vienna 1996.

LUGNANI, J. B.; *Introdução à Fototriangulação*, Curitiba, 1987.

MITICHE, A.; "A Computational Approach to the Fusion of Stereopsis and Kineopsis", Chapter 3: *Motion Understanding, Robot and Human Vision*, edited by W. N. MARTIN and J. K. AGGARWAL, Kluwer Academic Publishers, USA, 1988.

MORAVEC, H. P.; "Towards automatic visual obstacle avoidance", *In: Proc. of the 5th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, p. 584, August, 1977.

SCHALKOFF, R. J.; *Digital Image Processing and Computer Vision*, John Wiley & Sons, Inc., Singapore, 1989.

SMITH, S. M.; BRADY, J. M.; "SUSAN - A New Approach to Low Level Image Processing", *Defense Research Agency Technical Report TR95SMS1c*, Hampshire, UK, 1995.

YOUNG, C. *et al.* "Persistence of vision Ray-tracer (POV-Ray) - User's Documentation 3.0.10", POV-Ray Team, 1996.

ZHANG, Z.; DERICHE, R.; FAUGERAS, O.; LUONG, Q. T.; "A Robust Technique For Matching Two Uncalibrated Images Through The Recovery of The Unknown Epipolar Geometry", *Rapport de Recherche n. 2273*, INRIA, Sophia-Antipoles, 1994.

WU, Q. X. "A Correlation-Relaxation-Labeling Framework For Computing Optical Flow - Template Matching from a New Perspective", *IEEE-PAMI*, v. 17, n. 8, p. 843-853, September, 1995.