

Tentando manter a topologia e a diferenciabilidade em um morphing de curvas.

Antonio A.F.Oliveira e Luiz Marcos G. Gonçalves
Programa de Sistemas-COPPE/UFRJ-CP:68.511-21.945-970-Rio-RJ
{oliveira, lmarcos}@lcg.ufrj.br

Abstract: Consider the problem of morphing two simple differentiable closed curves composed of quadrics maintaining both topology and differentiability during the transformation. Here we indicate some partial results and some difficulties to get a morphing with those properties by using the fields of directions method.

keywords: Morphing, Fields of Directions, Triangulation.

1.Introdução

Sejam $L(i) \subseteq \mathbb{R}^2, i = 0, 1$; duas curvas simples, fechadas e diferenciáveis ambas constituídas pela união finita de quádricas. Desejamos transformar continuamente $L(0)$ em $L(1)$ obtendo apenas curvas simples, fechadas e diferenciáveis durante a transformação. Uma alternativa para tentar resolver esse problema é procurar estender o método que usa campos de direções para obter morphings entre contornos poligonais, a qual já foi exaustivamente descrito em trabalhos como [Oliveira(95)] e [Kallmann(97)]. Nos morphings gerados por esse método a topologia é preservada durante a transformação. O objetivo deste trabalho é tanto indicar resultados parciais já obtidos no sentido de se estender essa abordagem de forma que além da topologia, também a diferenciabilidade seja mantida durante o morphing, como apontar dificuldades encontradas para se fazer isso.

Suponha a partir de agora que a origem pertence ao interior das regiões delimitadas tanto por $L(0)$ como por $L(1)$ e que W e U são regiões anulares contendo essas duas curvas. W é delimitada por dois círculos centrados na origem e U , contendo W , por dois polígonos regulares. Seja então T uma triangulação de U , cujos vértices formam o conjunto V . Se $D: V \rightarrow S_1$ é um campo discreto que associa a cada vértice de T uma direção no plano, represente por $\overline{D_T}$, a extensão de D até U que é linear em cada triângulo de T . Diremos então que o par (T, D) é admissível, se:

i) $\overline{D_T}$ não apresentar singularidades. ii) As trajetórias induzidas por $\overline{D_T}$ comecem no bordo exterior de U e terminarem no seu bordo interior. iii) Essas trajetórias induzirem uma ordem parcial no conjunto de triângulos de T .

O approach que se está tentando utilizar é extremamente similar ao descrito em [Oliveira(95)]: A primeira etapa é obter para cada $L(i), i = 0, 1$, um par admissível composto de uma triangulação $T(i)$ de U , cujos vértices formam o conjunto $V(i)$ e de um campo discreto $D(i): V(i) \subseteq U \rightarrow S_1$ tal que $\overline{D(i)_{T(i)}}$ seja

transversal tanto a W como a $L(i)$. Conseguindo isso podemos identificar $L(i)$ com o gráfico da função $C_1, F(i)$, definida no círculo externo de $W(W_{out})$ a qual associa a cada ponto (p) desse círculo, a distância ao longo da trajetória induzida por $\overline{D(i)_{T(i)}}$ passando por p , desse ponto até ela encontrar $L(i)$.

Se necessário acrescentando pontos, podemos fazer com que $S(0)$ e $S(1)$ tenham a mesma cardinalidade e os mesmos pontos sobre o bordo de U . Numa segunda etapa devemos obter transformações contínuas de $S(0)$ em $S(1)$, de $T(0)$ em $T(1)$ e de $D(0)$ em $D(1)$. Suponha que conseguimos fazer isso de forma que, se $S(t)$, $T(t)$ e $D(t)$, são instâncias das três transformações obtidas para um t qualquer $\in [0, 1]$ então $(T(t), D(t))$ é um par admissível. Sejam agora, $\forall t \in [0, 1]$, $F(t): W_{out} \rightarrow \mathbb{R}$, a função dada por $(1-t)F(0) + tF(1)$ e $L(t)$ o conjunto dos pontos obtidos caminhando-se a partir de cada ponto p de W_{out} , ao longo da trajetória de $\overline{D(t)}$ que passa por ele, uma distancia igual a $F(t)(p)$. Os conjuntos $L(t), t \in [0, 1]$; definem uma transformação contínua de $L(0)$ em $L(1)$ com todas as propriedades requeridas. Determiná-los de forma eficiente constitui a terceira etapa do processo

Nas seções seguintes vamos analisar com mais detalhes cada uma dessas três etapas.

2. Primeira Etapa: Obtendo os Campos $D(i), i=0,1$.

Em relação a se obter os campos $D(i), i=0,1$ tem-se o seguinte resultado:

Lema 1: Se $L \subset W$ for um polígono simples com n lados e contendo a origem então é possível obter uma triangulação T de U com $O(n^2)$ vértices nos quais se pode definir um campo D tal que (T, D) é admissível e $\overline{D}$ é transversal a L .

Entretanto esse resultado não é ainda suficiente, por que as curvas $L(i), i=0,1$; não são polígonos mas uma concatenação de quádricas. Obter uma aproximação conveniente de $L(i)$ que seja um polígono simples pode requerer um número de lados

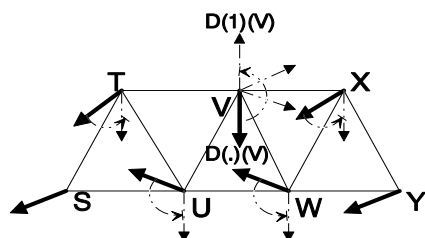


Figure 1: Ao rodarmos $D(.) (v)$ até sua posição final $D(1)(v)$ precisamos movimentar também o campo em t, u, w e x para que um par não admissível não seja gerado.

arbitrariamente grande em relação ao número de quádricas que a compõem. Para contornar essa dificuldade, uma alternativa que se está tentando explorar é a de se trabalhar com pseudo-triangulações onde as arestas são também quádricas.

3. Segunda etapa: Transformando Pontos, Triângulos e Campos.

Numa primeira fase dessa etapa cada vértice v de $S(0)$ é transportado até um correspondente em $S(1)$, o que pode acarretar diversas modificações na triangulação, sempre efetuadas via flip de arestas. Uma vez que todos os vértices tenham sido transportados até seus correspondentes em $S(1)$, passa-se então a transformar a triangulação até que ela coincida com $T(1)$, o que é feito mais uma vez via flip de arestas. Antes que cada um desses flips possa ser efetuado o campo tem que ser modificado de forma que no momento do flip ele não se deixe de ter um par admissível e não se produza uma descontinuidade na transformação. Numa última fase dessa etapa, transforma-se o campo em $D(1)$. Isso é feito mediante aplicação reiterada do seguinte procedimento: Enquanto houver um vértice de $S(1)$ onde o campo corrente difere da orientação que tem em $D(1)$, escolhe-se um desses vértices (v) e se faz rodar o campo definido nele ($D(.) (v)$) até que esse campo atinja a posição que deve ter em $D(1)$. Pode acontecer, entretanto, que antes de concluir essa rotação o campo em v se torne simétrico ao campo em um vértice w adjacente a v . A partir desse momento $\overline{D(.)}$ deixaria de ser regular. Para que isso não aconteça, dada uma folga $\varepsilon > 0$, quando o ângulo entre $D(.) (v)$ e $D(.) (w)$ for $\pi - \varepsilon$ devemos fazer $D(.) (w)$ começar a rodar no mesmo sentido e com a mesma velocidade que $D(.) (v)$. Na sequência do processo pode acontecer então, que o campo em v ou em w se torne simétrico ao de algum outro vértice adjacente a um deles. Antes que isso ocorra, o campo nesse vértice terá que ser rodado simultaneamente a $D(.) (v)$ e $D(.) (w)$ e assim por diante. Esse procedimento tem terminação finita, o que significa que ele

sempre consegue fazer $D(.) (v) = D(1)(v)$. Os campos gerados por ele satisfazem os dois primeiros itens da definição de campo admissível mas não há garantia que eles sempre induzam uma ordem parcial em $T(1)$, o que significa que $\overline{D(t)}$ pode eventualmente ter trajetórias cíclicas para algum $t \in [0, 1]$. Entretanto, conjecturamos que haja uma ordenação para os vértices de $S(1)$ tal que, escolhendo o vértice v levando em conta essa ordenação, esse problema possa ser evitado.

4. Terceira Etapa: Construindo $L(.)$ e Conclusões.

As trajetórias determinadas por um campo linear, como acontece com $\overline{D(.)}$ dentro de cada triângulo, são em geral curvas não polinomiais que gostaríamos de aproximar por quádricas, dado que precisamos encontrar inteseções dessas curvas com arestas da triangulação. Isso pode ser feito, imaginando-se que as trajetórias são curvas de nível de uma função cujos gradientes nos vértices de $T(.)$ são dados por $D(.)$ e refinando adequadamente os triângulos. Entretanto, as aproximações efetuadas dentro de cada triângulo não devem, ainda, dar origem a ciclos que originalmente não existiam e além disso no caso em que $t=0$ ou 1 elas precisam ser transversais às curvas dadas. Satisfazer esses dois requisitos num caso inteiramente geral vem se mostrando difícil. Pesquisa-se determinar situações suficientemente genéricas em que isso seja mais simples.

Concluindo diríamos que apesar dos resultados obtidos oferecerem uma perspectiva para a resolução do problema tratado, ainda há dificuldades consideráveis para que se obtenha uma versão implementável do método. Além de se procurar formas de contorná-las, se estuda ainda a utilização de um modelo físico para temporizar as muitas operações elementares que constituem a transformação indicada na seção 3.

Referencias .

- M.Kallmann e A.Oliveira, Homeomorphisms and Metamorphosis of Polyhedral Models using Fields of Directions on Triangulations, *J. of Braz. Comp. Soc.* 3 n^o 3 (1997), 52-64.
A.Oliveira, S. do Nascimento e S.Meerbaum, Using Fields of Directions defined on a Triangulation to obtain a continuous Transformation of a Polygon into Another, *Anais do VIII SIBGRAPI*, S.Carlos, SP(1995), 95-102.