

Modelagem Geométrica de 3-Complexos Celulares

L. A. P. LOZADA^{1*}; C. F. X. DE MENDONÇA¹

¹Instituto de Computação (IC), Universidade Estadual de Campinas, 13081-970, Campinas, SP.
{lozada,xavier}@dcc.unicamp.br

Abstract. A three-dimensional cellular complex is a subdivision of a topological space into a finite number of cells (vertices, edges, faces and polyhedrons). The topology of a cellular complex is the abstract incidence and adjacency relations among its elements. In this work we propose a geometric modeling of 3-dimensional complexes with topology of closed 3-manifolds, based in tetrahedron gluing with consistent orientations.

Keywords: Computer graphics, computational topology, geometric modeling.

1 Introdução

Na topologia tridimensional existem muitos problemas em aberto. A visualização de 3-variedades é um destes problemas de tratamento difícil. Existem poucos trabalhos abordando este problema, dentre os quais citamos: Koçak e Laidlaw [1] para a visualização da esfera S^3 e Gunn [3] para a visualização interna de 3-variedades.

A metodologia de visualização usado por Rosi e Stolfi em [5] e [4] para a visualização de complexos celulares bidimensionais pode ser estendida para dimensões maiores; assim, a nossa pesquisa trata da visualização automática de 3-complexos celulares com topologia de 3-variedade fechada.

Um 3-complexo celular é uma subdivisão de uma 3-variedade topológica em uma coleção finita de poliedros simples¹, faces, arestas e vértices; tais que estes elementos são homeomorfos a \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^1 e \mathbb{R}^0 respectivamente e a fronteira de cada elemento é a união de elementos de dimensão menor. Um 3-complexo celular pode ser descrito por um *modelo de colagem*: uma coleção finita de poliedros geométricos, cujas faces são identificadas duas a duas, até que não existam mais faces sem identificar (veja exemplo na figura 7). Para que essas colagens sejam possíveis, suporemos que os poliedros são feitos de material elástico e que a construção do complexo é realizada no espaço² \mathbb{R}^4 .

Para a visualização da topologia de um 3-complexo celular, teremos que resolver os mesmos problemas enfrentados em [5], ou seja, em primeiro lugar, precisamos construir um modelo geométrico do complexo no espaço \mathbb{R}^4 ; posteriormente precisamos de

um processo de otimização das representações geométricas do complexo e finalmente desenvolver um módulo de visualização. Tratamos neste trabalho o primeiro destes problemas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na seção 2 tratamos conceitos básicos. Na seção 3, abordamos o processo de *subdivisão baricêntrica*. Para a manipulação do complexo celular adotamos a estrutura *facet-edge* (seção 4). Na seção 5 tratamos da proposta de modelagem da topologia de 3-complexos celulares. Na seção 6 exibimos uma aplicação da modelagem proposta. Na seção 7 apresentamos as conclusões e os trabalhos futuros.

2 Conceitos Básicos

Uma *n-variedade topológica* M de \mathbb{R}^m , onde $m \geq n$, é um espaço topológico no qual todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa à n -bola aberta B^n . Uma *n-variedade* é *fechada* se esta é compacta e sem fronteira.

3 Subdivisão Baricêntrica

O conceito de subdivisão baricêntrica nos permite subdividir o complexo em unidades de modelagem uniformes.

Dado um 3-complexo celular \mathcal{C} , dizemos que um vértice v é do tipo P , denotado por v_p , se este situa-se no meio de um poliedro p de \mathcal{C} ; de maneira análoga definimos os tipos: F , denotado por v_f , se este vértice situa-se no meio de uma face f de \mathcal{C} ; E , denotado por v_e , se este vértice situa-se no meio de uma aresta e de \mathcal{C} , e V , denotado por v_v , se o vértice é coincidente com um vértice do complexo \mathcal{C} .

Informalmente, a subdivisão baricêntrica \mathcal{S} do complexo \mathcal{C} , é obtida da seguinte maneira: inserimos vértices de tipo P , F e E em \mathcal{C} ; ligamos os vértices de

*Suporte financeiro FAPESP — processo N. 96/09873-0.

¹Poliedro homeomorfo à 3-bola aberta B^3 .

²Quatro dimensões são suficientes para os complexos ditos *orientáveis*, mas outros complexos podem exigir cinco.

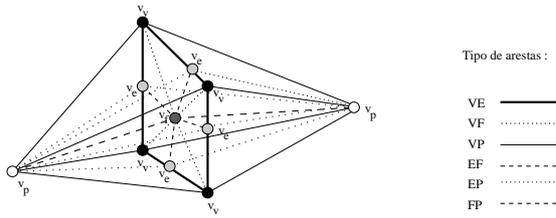


Figure 1: Subdivisão Baricêntrica.

tipo P e F aos vértices (originais e novos) nas fronteiras do poliedro e da face, respectivamente. A figura 1, ilustra parcialmente a subdivisão baricêntrica de um 3-complexo celular.

4 Estrutura de dados Facet-Edge

A estrutura *facet-edge* de Dobkin e Laszlo [2] permite a manipulação de 3-complexos celulares. A unidade básica é constituída pelo par “face-aresta” (f, e) , sendo f e e incidentes. Considera-se também o anel de faces incidentes em e , denotado por \mathcal{F}_e , e o anel de arestas incidentes em f , denotado por \mathcal{E}_f . O sentido particular de rotação de \mathcal{E}_f é chamado de *orientação*, enquanto o sentido de rotação de \mathcal{F}_e é chamado de *spin*.

Existem cinco funções de percurso: *Enext*, *Fnext*, *Spin*, *Clock* e *Sdual*. A função *Fnext*, retorna o par face-aresta com a mesma componente aresta, mas com a próxima face ao redor da aresta segundo o *spin*. A função *Clock*, muda o sentido de rotação dos anéis de face e de aresta (veja figura 2(a)). A função *Sdual*, retorna o correspondente par face-aresta dual.

Existem também, três operadores de construção: *make_facet_edge*, *splice_facets* e *splice_edges*. O primeiro operador é utilizado na implementação da estrutura de dados. Os operadores *splice_facets* e *splice_edges* são utilizados para modificar os anéis de faces, \mathcal{F}_e , e de arestas, \mathcal{E}_f , respectivamente, de um complexo. A operação *splice_facets* (a, b) toma como argumentos os pares face-aresta a e b . Esta operação afeita os anéis de faces \mathcal{F}_a e \mathcal{F}_b como segue: (i) se os dois anéis são distintos, *splice_facets* combina os anéis num só anel; (ii) se os anéis são idênticos, *splice_facets* quebra o anel em dois anéis distintos. A figura 2(b) ilustra o efeito do operador *splice_facets* (a, b) .

5 Modelagem da Topologia do 3-Complexo Celular

Nossa modelagem geométrica da topologia de 3-complexos celulares procura ser expresso numa forma bastante “simples” de modo a evitar detalhes geométricos que não tenham significado topológico (equi-

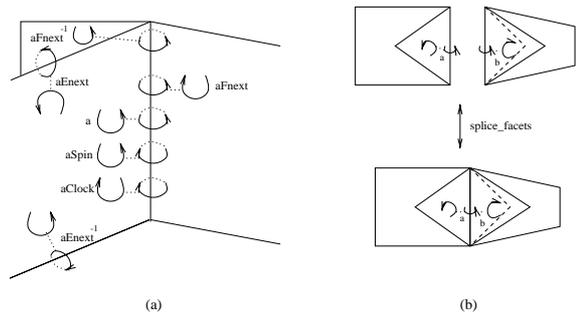


Figure 2: Estrutura Facet-Edge.

valentes a dobras e interseções em [5]). O modelo geométrico procura também deixar os elementos do complexo (poliedros, faces, arestas e vértices) bem separados e de preferência com um tamanho uniforme. Um modelo geométrico conveniente (análogo ao caso bidimensional [5]) o constitui uma malha tridimensional de tetraedros.

Uma maneira óbvia de modelar os complexos tridimensionais seria considerar cada poliedro do complexo como uma unidade de modelagem. Entretanto, os poliedros do complexo podem ter um número arbitrário de faces coladas entre si. Para contornar essa dificuldade, introduzimos o conceito de *tetraedração do complexo*, que é uma subdivisão do mesmo em unidades de modelagem mais simples, os *tetraedros topológicos*.

5.1 Tetraedração do Complexo

A subdivisão baricêntrica \mathcal{S} do complexo \mathcal{C} , “tetraedrizará”³ o complexo. Seja e uma aresta arbitrária de \mathcal{C} e \mathcal{F}_e o anel de faces de \mathcal{C} que incidem em e , para cada par “face-aresta” (f, e) , tal que $f \in \mathcal{F}_e$, definimos o *tetraedro topológico* como a união de quatro tetraedros da subdivisão baricêntrica \mathcal{S} que têm uma das duas faces do tipo V, E, F (parte da face f) como uma de suas faces e uma das duas faces do tipo E, F, P (parte da face e' , o dual da aresta e) como outra face. A figura 3(a) ilustra a conformação do tetraedro topológico para o par face-aresta (f, e) . Observe que os vértices extremos do tetraedro topológico são vértices do tipo V e P e que o tetraedro topológico é uma região do complexo com quatro faces triangulares contendo a aresta primal e e a aresta dual f' como arestas não adjacentes do tetraedro topológico (veja figura 3(b)).

O número total de tetraedros topológicos existentes na tetraedração $\Delta\mathcal{C}$ é: $t = \sum_{i=1}^m |\mathcal{F}_{e_i}|$, onde m é o número de arestas de \mathcal{C} e $|\mathcal{F}_{e_i}|$ é o número de

³Termo adotado para nos referir a uma triangulação tridimensional.

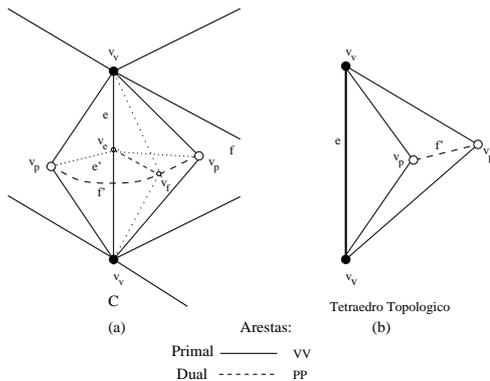


Figure 3: Conformação do tetraedro topológico.

faces incidentes na aresta e_i , $i = 1, \dots, m$. A tetraedração $\Delta\mathcal{C}$ pode ser considerada uma malha tridimensional de tetraedros topológicos, onde cada poliedro de \mathcal{C} é subdividido em tetraedros topológicos.

Consideramos que a direção de uma aresta e no esquema de colagem induz uma orientação nas faces do tetraedro que incidem nesta aresta. Consideramos também que o *spin* é sempre anti-horário (veja figura 4(a)). Logo todo tetraedro topológico possui arestas ambigualmente orientadas (desenhada por linhas grossas) e arestas com orientações definidas (desenhadas por linhas simples).

A proposta de modelagem é composta pelas etapas: a colagem dos tetraedros topológicos e a subdivisão refinada da colagem.

5.2 Colagem dos Tetraedros Topológicos

No processo de colagem identificamos os tetraedros topológicos como prescrito pelas relações de adjacência entre os pares face-aresta do complexo, descritos no esquema de colagem. Isto é, colamos o tetraedro topológico correspondente ao par face-aresta a e o tetraedro topológico correspondente ao par face-aresta b tal que $b = aFnext$ (veja figura 4(a)).

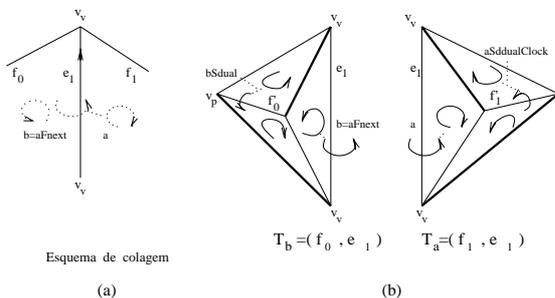


Figure 4: Par de tetraedros a serem colados.

Em princípio, a colagem deverá ser aplicada aos tetraedros topológicos associados a todos os pares

face-aresta a e $b = aFnext$, tanto no espaço primal como no espaço dual. O processo de colagem é realizado pelo algoritmo 1.

Algoritmo 1 *GlueTetra(a,b=aFnext)*: cola dois tetraedros topológicos correspondentes aos pares face-aresta a e $b = aFnext$ do complexo \mathcal{C} , identificando a face triangular f_a com f_b e as arestas e_{a_i} com e_{b_i} para $0 \leq i \leq 2$.

1. $firsta \leftarrow a$;
2. Repita
 - 2.1 Se $\mathcal{F}_a \neq \mathcal{F}_b$
 - 2.1.1 *SpliceFacets* ($a, bFnext^{-1}$);
 - 2.2 *SpliceFacets* ($a, aFnext^{-1}$);
 - 2.3 $a \leftarrow aEnext$;
 - 2.4 $b \leftarrow bEnext$;
3. Até que $a = firsta$;

A colagem dos tetraedros topológicos é realizado de maneira tal, que arestas ambigualmente orientadas e arestas com orientações definidas são identificadas aos pares. Após a colagem dos tetraedros topológicos as arestas ambigualmente orientadas possuem orientações coerentes.

É possível que durante o processo de colagem alguns tetraedros topológicos tenham que ser colados em si mesmo, isto ocorre quando no esquema de colagem existe um par face-aresta adjacente a si mesmo, isto é, quando $aFnext = a$ (veja figura 5(b)). Para contornar este problema contamos com o algoritmo: *Subdivisão Radial*, que permite a colagem do tetraedro sem degenera-lo (veja figura 5(d)). A idéia intuitiva deste algoritmo consiste em subdividir o tetraedro em novos tetraedros mediante a inserção de faces incidentes na aresta e , sobre o qual incidem as faces do tetraedro a serem coladas e incidentes na aresta oposta à aresta e (veja figura 5(c)).

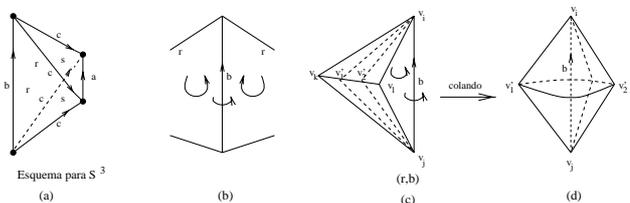


Figure 5: Ilustração da Subdivisão Radial.

O processo de otimização das realizações geométricas de um complexo celular não pode ser aplicado diretamente aos elementos originais que conformam o complexo, assim, torna-se necessário obter uma subdivisão “refinada” do complexo.

5.3 Subdivisão Refinada da Colagem

Uma vez que a nossa abordagem contempla primeiro a colagem dos tetraedros topológicos e posteriormente a subdivisão das colagens garante-se então a não conformação de pares de tetraedros degenerados⁴.

Precisamos de rotinas para a subdivisão das colagens dos tetraedros topológicos. A abordagem a seguir consiste em subdividir de maneira refinada os tetraedros topológicos em k^3 tetraedros retilíneos, onde k é a ordem de refinamento. Com esta subdivisão o complexo celular \mathcal{C} com t pares face-aresta pode ser substituído pela tetraedração refinada de ordem k , $\Delta_k \mathcal{C}$ com tk^3 tetraedros retilíneos, $2tk^3$ triângulos planos e $t(k^3 + k^2 + 1)$ arestas retas. A figura 6 ilustra um tetraedro subdividido numa malha tridimensional de ordem $k = 2$ (8 tetraedros).

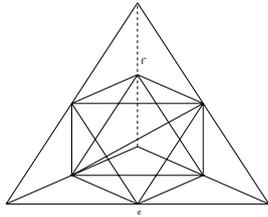


Figure 6: Tetraedro subdividido.

6 Exemplo

A figura 7 ilustra o esquema de colagem para a obtenção do complexo com topologia do toro tridimensional T^3 , este complexo possui um vértice, três arestas, três faces e um poliedro. O complexo possui também, seis pares face-aresta e assim seis tetraedros topológicos. A figura 8, indica as faces a serem identificadas (faces com números sublinhados situam-se por atrás do tetraedro).

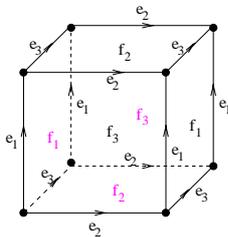


Figure 7: Esquema de colagem do T^3 .

⁴Tetraedros distintos incidentes nos mesmos quatro vértices.

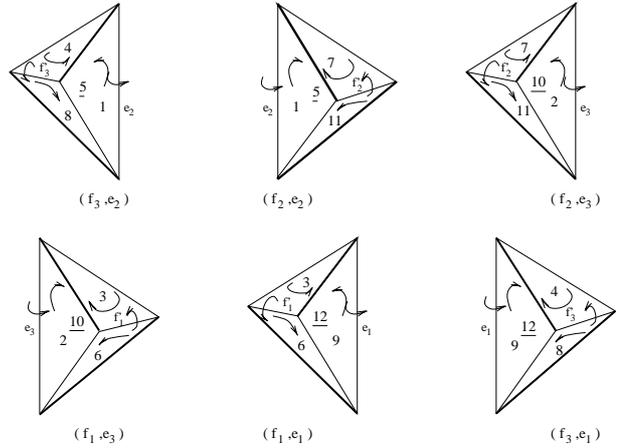


Figure 8: Tetraedros a colar para a obtenção de T^3 .

7 Conclusão e Trabalhos Futuros

Apresentamos uma abordagem para a modelagem geométrica de complexos com topologia de 3-variedade fechada por colagens de tetraedros topológicos com orientações consistentes.

A próxima etapa em nossa pesquisa é a definição de *funções de energia*⁵. Acreditamos que a modelagem aqui proposta permite por meio da otimização das funções de energia a realização de instâncias geométricas dos complexos possuindo critérios estéticos “legíveis”.

References

- [1] H. Koçak and D. Laidlaw. Computer Graphics and the Geometry of S^3 . *The Mathematical Intelligencer.*, 9(1):8–10, 1987.
- [2] D. P. Dobkin and M. J. Laszlo. Primitives for the Manipulation of Three-dimensional Subdivisions. *Algorithmica*, 4:3–32, 1989.
- [3] C. Gunn. Discrete Groups and Visualization of Three-Dimensional Manifolds. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pages 255–262, 1993.
- [4] L. P. Lozada, C. F. X. de Mendonça, R. M. Rosi, and J. Stolfi. Automatic Visualization of Two-dimensional Cellular Complexes. *Graph Drawing'96 - Lecture Notes in Computer Science*, 1190:303–317, 1996.
- [5] R. M. Rosi and J. Stolfi. Visualização Automática de Complexos Celulares Arbitrários. *Anais do XXI Seminário Integrado de Hardware e Software (SEMISH)*, pages 69–83, 1994.

⁵Funções que medem as características indesejáveis das realizações geométricas dos 3-complexos celulares