

FILTRAGEM DE CURVAS E SUPERFÍCIES SPLINES

Ronaldo Marinho Persiano

Laboratório de Computação Gráfica
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
COPPE/UF RJ
C.P. 68511
21945 Rio de Janeiro

RESUMO: A suavização de curvas e superfícies é tratada aqui com técnicas de filtragem. Mostra-se que, com a escolha adequada do filtro, curvas *splines* uniformes quando filtradas são curvas *splines* polinomiais cuja ordem é uma unidade acima que a da curva original, e com a mesma sequência de nós. Os pontos de controle da curva filtrada são calculados por meio de simples combinações convexas dos pontos de controle da curva original. A extensão desses resultados a superfícies representadas por produto tensorial é apresentada.

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de curvas e superfícies apoiada por métodos computacionais faz uso frequente de *splines* para sua representação paramétrica. Curvas (superfícies) paramétricas *splines* são especificadas por uma sequência (malha retangular) finita de pontos do espaço que permitem determinar algebricamente e geometricamente sua forma. Através desses pontos de controle curvas e superfícies são modeladas em ambientes interativos.

Uma má escolha da posição dos pontos de controle poderá resultar em uma curva ou superfície que, embora possua uma forma geral satisfatória, apresenta oscilações indesejáveis (Rogers[88]). A literatura reporta várias tentativas de resolver o problema de obter-se uma nova superfície spline que aproxime uma dada superfície *spline* com menos oscilações que a original (Nowaki[83], Lott[88], Farin[88]). As propostas usuais envolvem por um lado a mudança dos pontos de controle por meio de critérios empíricos e por outro a formulação de um problema de otimização tendo os pontos de controle da nova superfície por variáveis de decisão, uma limitação do desvio entre as duas por restrição, e a minimização de alguma medida da curvatura da nova superfície por objetivo. Por ser bastante complexo, o problema de otimização resultante é simplificado, mas mesmo assim sua resolução envolve um ponderável esforço computacional o que a torna pouco propícia ao uso em ambientes interativos.

O problema de eliminação de oscilações localizadas em curvas e superfícies (denominado suavização) é abordado aqui por meio de técnicas de filtragem largamente utilizadas em processamento de sinais e de imagens. Um filtro visa eliminar o ruído de um sinal pela redução de suas componentes de alta frequência preservando as componentes de baixa frequência. Na sua aplicação a curvas paramétricas objetivamos eliminar oscilações localizadas da curva mantendo sua tendência geral inalterada. Veremos que, pela escolha adequada do filtro, a filtragem de uma curva *spline* polinomial será também ela uma curva *spline* polinomial cujos pontos de controle podem ser facilmente computados a partir dos pontos de controle da curva original.

O texto está organizado da seguinte forma: na próxima seção introduzimos os principais conceitos, o filtro adotado e apresentamos os principais resultados; na seção seguinte, os resultados são discutidos e seus efeitos avaliados por meio de exemplos; na terceira seção, de conteúdo mais técnico, os

principais resultados são revistos na sua formulação matemática preparando a discussão das conclusões e extensões expostas na última seção.

2. FILTRAGEM DE CURVAS E SUPERFÍCIES

A idéia básica de filtragem pode ser transmitida por um pequeno exemplo. Na análise de tendência de séries históricas de dados muito ruidosos (tal como o valor de ações no mercado de capitais) nos defrontamos com variações de período curto que, por sua amplitude, mascaram as variações de longo e médio prazo. Para explicitarmos estas últimas devemos eliminar o *ruido* da amostra seriada pelo cálculo de valores médios em períodos de, digamos, um mês. Podemos associar a cada dia o valor médio dos dados num período de tempo centrado naquele dia e, dessa forma, contruirmos uma variável de tendência que evolue no tempo. Observa-se neste exemplo que variações de curto prazo (menores que um mês) tendem a ser substancialmente reduzidas, enquanto as de período maiores são preservadas.

Curvas paramétricas podem ser interpretadas como a trajetória de um ponto movendo-se no espaço. O parâmetro tem o significado do eixo dos tempos e as coordenadas dos pontos podem ser interpretadas como séries históricas. Se filtrarmos cada uma dessas séries geraremos outras que apresentarão menor variação. O filtro que propomos neste trabalho possui basicamente as mesmas propriedades do filtro discreto descrito no exemplo acima, mas visa preservar a natureza contínua da curva original. A curva resultante da filtragem da curva base é aquela que passa pelos centros de massa dos pontos da curva base que são imagem de um intervalo de largura constante prefixada. Matematicamente, se $C(\cdot)$ é a função que associa um ponto $C(t)$ da curva a cada valor t do parâmetro, então o ponto da curva filtrada C_F associado ao mesmo valor de parâmetro será

$$C_F(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} C(u) du$$

onde 2δ , a largura do filtro, determinará a extensão máxima do período das variações que serão reduzidas.

Curvas *splines* polinomiais são curvas paramétricas cuja expressão matemática é da forma:

$$C(u) = \sum_i V^i B_i^n(u) \quad (1)$$

onde V^i são pontos (de controle) do espaço e $\{B_i^n\}$ é a base *B-spline* de grau n sobre uma sequência de nós $\{u_i \text{ real} \mid i \text{ inteiro}\}$. A base *B-spline* é constituída de funções polinomiais por partes de grau n . Uma vez fixada a base *B-spline* adotada (grau e sequência de nós), os pontos de controle V^i determinam a forma da curva. Em certo sentido, a curva C imita a poligonal que une seus pontos de controle V^i (vide Farin[88] e as figuras a seguir).

O primeiro resultado a que chegamos na filtragem de curvas *splines* polinomiais caracteriza a curva filtrada como uma curva de mesma natureza com grau uma unidade maior que a original, ou seja, pode ser expressa por:

$$C_F(u) = \sum_i V_F^i B_i^{n+1}(u)$$

Naturalmente, porém, para a devida representação da curva filtrada devemos determinar seus pontos de controle.

O resultado principal deste trabalho corresponde à determinação dos pontos de controle V_F^i a partir dos pontos originais V^i no caso mais usual em que os nós da curva C são igualmente espaçados. Nesse caso, se tomarmos a largura 2δ do filtro como um múltiplo do intervalo entre nós de C , então, os pontos de controle de C e C_F relacionam-se por meio de:

$$V_F^i = \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i V^j$$

onde k é o número de intervalos que compõem a largura do filtro.

A expressão de V_F^i envolve k pontos V^j . Corresponde, portanto, a uma simples média entre esses pontos, ou ainda, ao centro de massa deste conjunto. Em outras palavras, os pontos de controle da curva filtrada correspondem à filtragem discreta com largura k dos pontos de controle de C . A simplicidade do cálculo dos pontos de controle V_F^i e o fato de sua avaliação depender do grau da curva a filtrar são a um só tempo convenientes e surpreendentes.

Superfícies *splines* paramétricas, por seu turno, são frequentemente definidas por produto tensorial:

$$S(u, v) = \sum_i \sum_j V^{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad u \in [a, b] \quad v \in [c, d]$$

a partir de duas bases de funções B-*plines* $\{B_i^n\}$ e $\{B_j^m\}$. Nesses modelos matemáticos, fixada a base de funções (graus e seqüências de nós), a forma da superfície é também determinada pelo posicionamento dos pontos V^{ij} .

A filtragem de funções bi-variadas utiliza os mesmos princípios discutidos anteriormente. A janela do filtro, antes um intervalo, é agora um retângulo centrado em um ponto do espaço paramétrico. O filtro contínuo que utilizamos para superfícies corresponde a associar a cada valor do parâmetro (u, v) a integral de S em um retângulo afi centrado de lados 2δ e 2α respectivamente:

$$S_F(u, v) = \frac{1}{4\delta\alpha} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{v-\alpha}^{v+\alpha} S(t, s) dt ds$$

A extensão dos resultados de filtragem de curvas para a filtragem de superfícies é nesse caso imediata. A superfície S_F será uma superfície *spline* de grau $(n+1) \times (m+1)$. Se as bases B_i^n e B_j^m são uniformes, e 2δ e 2α são escolhidos como múltiplos dos respectivos intervalos entre nós, então, os pontos de controle V_F^{ij} da superfície S_F podem ser calculados por meio de:

$$V_F^{ij} = \frac{1}{kl} \sum_{r=i-k+1}^i \sum_{s=j-l+1}^j V^{rs}$$

onde k e l são as larguras da janela do filtro expressas em números de intervalos entre os nós em u e v , respectivamente. Observa-se aqui a mesma propriedade encontrada na filtragem de curvas: os pontos de controle da superfície filtrada são resultado da filtragem discreta (média) dos pontos de controle da superfície de partida.

3. DISCUSSÃO E EXEMPLOS

Do ponto de vista puramente algorítmico, o cálculo da filtragem de uma curva ou superfície resume-se à determinação dos seus pontos de controle V_F^i ou V_F^{ij} , já que seu grau e seqüência de nós e previamente conhecido. Nas expressões apresentadas não temos a preocupação de estabelecer limites para a indexação dos pontos de controle e das funções de base. De fato, podemos sempre supor que há uma infinidade de nós $u_i = i \Delta u$ e uma infinidade de pontos de controle correspondentes V^i onde $V^i = V^0$ para $i < 0$ e $V^i = V^N$ para $i > N$. Nessas condições, um procedimento para o cálculo dos pontos de controle da curva filtrada com um filtro de largura k seria:

```
VF[0] := V[0];
for i:=1 to k do
  VF[i] := VF[i-1] + (V[i]-V[0])/k;
for i:=k+1 to N do
  VF[i] := VF[i-1] + (V[i]-V[i-k])/k;
for i:=N+1 to N+k do
  VF[i] := VF[i-1] + (V[N]-V[i-k])/k;
```

Se a curva original estava definida para u no intervalo $[a, b]$ a curva filtrada terá por intervalo de definição $[a-k/2, b-k/2]$.

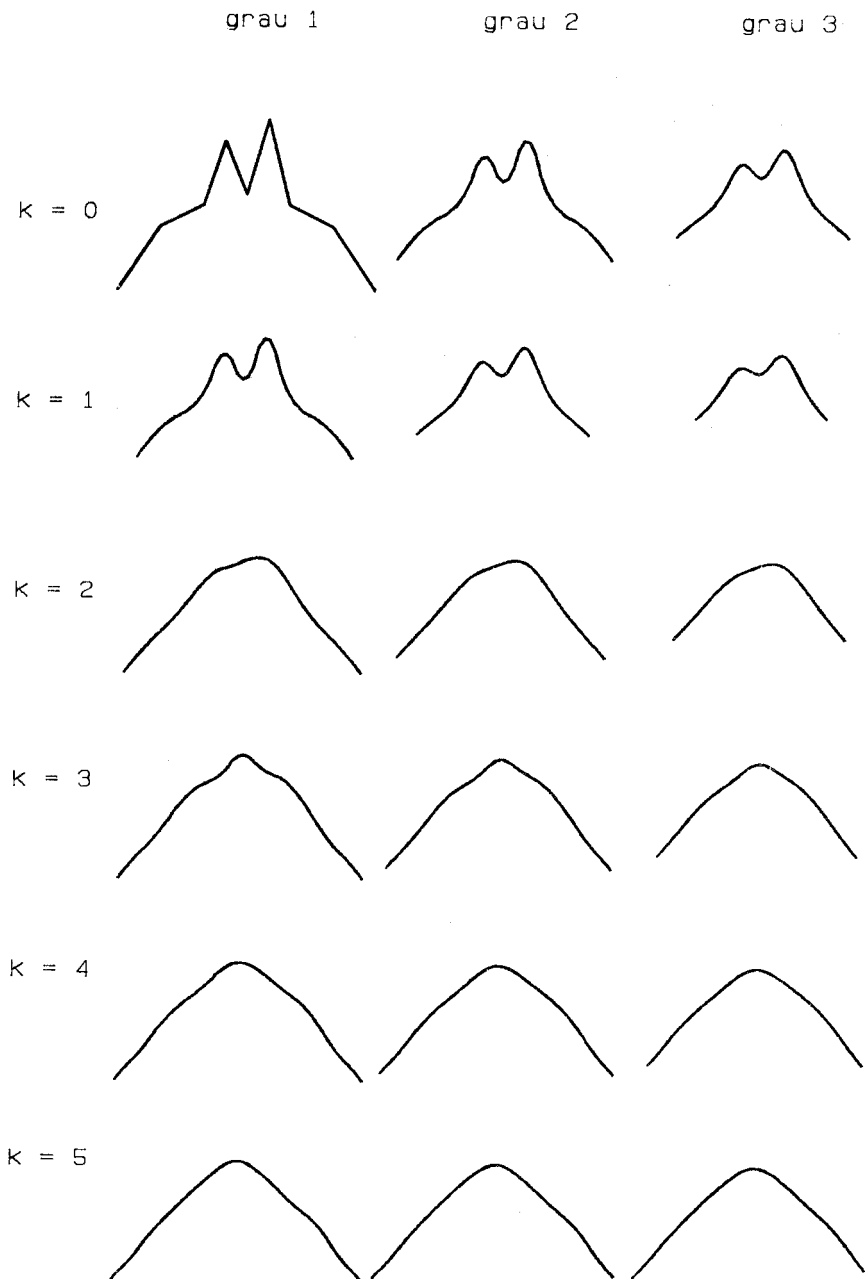


Fig. 1: Aplicação de filtros de diversas larguras a curvas de diferentes graus.

A figura 1 oferece um quadro dos resultados da filtragem de curvas de graus variando de 1 a 3, com filtros de largura entre 1 e 5. Em cada coluna vemos o resultado de aplicarmos um filtro de largura crescente à curva que encima a coluna. Naturalmente, o grau das curvas restantes da coluna é um a mais que o grau da curva do topo. Nota-se flagrantemente o efeito de suavização do filtro, efeito este que tende a crescer com sua largura. Não sabemos justificar, entretanto, o fato de que o filtro de largura 3 apresentar um resultado aparentemente pior que o de largura 2. É notável ainda a semelhança entre as curvas filtradas com uma janela de largura 4. Isto sugere que uma curva filtrada com um filtro largo talvez possa ser aproximada bastante bem por uma curva de grau menor.

A escolha da largura do filtro dependerá naturalmente da amplitude e do período das oscilações que se desejem eliminar. A aplicação de um filtro muito estreito reduzirá pouco as oscilações. Um filtro largo demais resultará em eliminação de sinuosidades da curva que fazem parte da forma que almejamos. A figura 2 mostra o efeito da aplicação de um filtro muito largo ($k=10$) à curva de grau 2 do exemplo anterior. Observa-se ali que a curva filtrada já "descola-se" do trajeto esperado.

Embora os exemplos ilustrados até aqui sugiram que a curva filtrada apresenta uma curvatura menor que a da curva original, há casos em que isto não se verifica. A figura 3 apresenta uma curva de grau 1 (poligonal) e suas filtragens com larguras de filtro iguais a 1 e 2. O laço da curva base tende a ser desfeito pela filtragem. Entretanto, a filtragem de largura 2, ao desfaze-lo, cria uma cúspide. Não se pode portanto assegurar que a curvatura seja necessariamente reduzida com a filtragem.

Conclui-se dessa discussão sumária que a filtragem de curvas não é uma panacea, como de todo modo não o são os métodos encontrados na literatura, para a resolução do problema de suavização. Presta-se bem aos casos, não patológicos, em que a curva original já esteja próxima da forma final desejada apresentando pequenas oscilações.

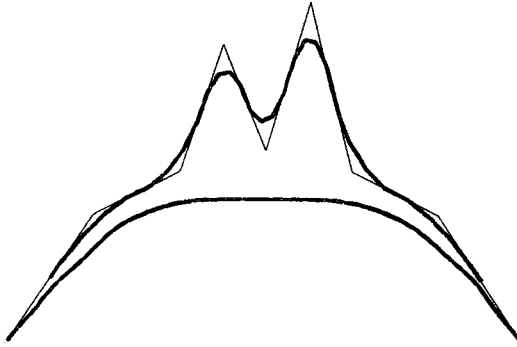


Fig. 2: Curva de grau 2 filtrada com largura $k=10$.

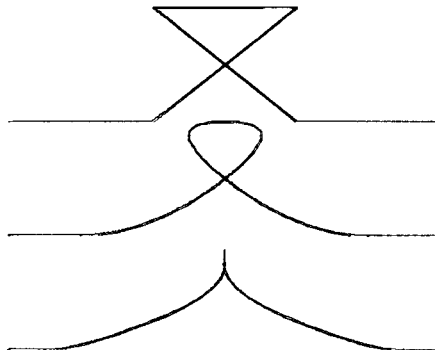


Fig. 3: Filtragem de curvas com laço.

4. CÁLCULO DA FILTRAGEM DE CURVAS SPLINES

Curvas *splines* polinomiais são expressas por um mapeamento da forma (1) de um intervalo real $[a, b]$ no espaço tridimensional. A base *B-spline* é definida recursivamente (de Boor [78]) por:

$$B_i^0(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & u \notin [u_i, u_{i+1}] \end{cases} \quad (2)$$

$$B_i^n(u) = \frac{u - u_i}{u_{n+i} - u_i} B_i^{n-1} + \frac{u_{n+i+1} - u}{u_{n+i+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^{n-1} \quad (3)$$

Uma suavização da curva $C[a, b]$ pode ser obtida pela filtragem do mapeamento C que a define. A filtragem do mapeamento C produzirá um outro mapeamento C_F e em consequência uma outra curva no espaço $C_F[a, b]$. Um filtro F bastante simples pode ser definido por:

$$F(C)(t) = C_F(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} C(u) du \quad (4)$$

Como o mapeamento C é definido por (1), o mapeamento filtrado pode ser expresso por:

$$C_F(t) = \sum_i V^i \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} B_i^n(u) du \quad (5)$$

o que evidencia que a filtragem de $C[a, b]$ é uma curva caracterizada pelos mesmos pontos de controle de C com uma família de funções de base diferente da *B-spline*: a nova família de funções de base será simplesmente a filtragem da família B . Veremos em seguida a caracterização dessa nova família de funções de base:

$$D_i^n(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} B_i^n(u) du \quad (6)$$

Teorema 1

As funções D_i^n são *splines* polinomiais de grau $n+1$, cuja sequência de nós é $\{u_i \pm \delta \mid i \text{ inteiro}\}$, e podem ser avaliadas por:

$$D_i^n(t) = \frac{u_{n+i+1} - u_i}{2(n+1)\delta} \sum_{j \geq i} B_j^{n+1}(u+\delta) - B_j^{n+1}(u-\delta) \quad (7)$$

Prova

De acordo com Farin[88], a derivada de B_j^{n+1} pode ser expressa por:

$$\frac{dB_j^{n+1}(u)}{du} = \frac{n+1}{u_{n+j+1} - u_j} B_j^n(u) - \frac{n+1}{u_{n+j+2} - u_{j+1}} B_{j+1}^n(u)$$

Por integração desta identidade em $[u-\delta, u+\delta]$, concluímos:

$$B_j^{n+1}(u+\delta) - B_j^{n+1}(u-\delta) = \frac{n+1}{u_{n+j+1} - u_j} \int_{u-\delta}^{u+\delta} B_j^n(t) dt - \frac{n+1}{u_{n+j+2} - u_{j+1}} \int_{u-\delta}^{u+\delta} B_{j+1}^n(t) dt$$

Somando-se as igualdades acima para $j \geq i$, quase todos os termos à direita cancelam-se e resulta:

$$\sum_{j \geq i} B_j^{n+1}(u+\delta) - B_j^{n+1}(u-\delta) = \frac{n+1}{u_{n+i+1} - u_i} \int_{u-\delta}^{u+\delta} B_i^n(t) dt$$

concluindo a prova.

A primeira grande consequência da aplicação do filtro F a C é portanto a elevação de grau da curva *spline*. Mantem-se, porém, a natureza de *spline* polinomial da curva original. A possível ampliação do número de nós da família D_i^n torna, entretanto, um pouco complexa a análise das características dessas funções. O resultado seguinte particulariza o do Teorema 1 para o caso mais usual de *B-splines* uniformes.

Teorema 2

Se os nós de B_i^n são uniformemente espaçados e 2δ é múltiplo do intervalo entre nós ($2\delta=k(u_i-u_{i-1})$), então,

$$D_i^n(u-\delta) = \frac{1}{k} \sum_{j=i}^{i+k-1} B_j^{n+1}(u) \quad (8)$$

e os nós de D_i^n coincidem, a menos de um deslocamento $-\delta$, com os nós de B_i^n .

Prova

B-splines uniformes atendem a:

$$B_j^{n+1}(u-k\Delta u) = B_{j+k}^{n+1}(u)$$

e portanto, em conformidade com as hipóteses, vale:

$$B_j^{n+1}(u-\delta) = B_{j+k}^{n+1}(u+\delta)$$

Avaliando-se o somatório da expressão (7), por cancelamento de termos, conclui-se:

$$\sum_{j \geq i} B_j^{n+1}(u+\delta) - B_j^{n+1}(u-\delta) = \sum_{j \geq i} B_j^{n+1}(u+\delta) - B_{j+k}^{n+1}(u+\delta) = \sum_{j=i}^{i+k-1} B_j^{n+1}(u+\delta)$$

completando a prova, pois $2(n+1)\delta = k(u_{n+i+1}-u_i)$.

A equação (8) exprime cada função de base filtrada como combinação convexa (média) de um subconjunto das funções B_i^{n+1} deslocadas de δ . Por (5) e (6), a curva C_F expressa na base D_i^n possui os pontos V^i como pontos de controle. Entretanto, se a exprimirmos numa base *B-spline* (B_i^{n+1}), os seus pontos de controle deverão ser recalculados. Este é o tema do Corolário abaixo que resume os resultados observados até agora.

Corolário

Sob as hipóteses do Teorema 2, a curva C_F é uma curva *spline* de grau $n+1$, possuindo os mesmos nós de C deslocados de $-\delta$, e tendo por pontos de controle na base *B-spline*

$$V_F^i = \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i V^j$$

Prova

Aplicando-se (8) a (5) tem-se:

$$\begin{aligned} C_F(t) &= \sum_i V^i \frac{1}{k} \sum_{j=i}^{i+k-1} B_j^{n+1}(t+\delta) && \text{por definição} \\ &= \sum_i \frac{1}{k} \sum_{j=i}^{i+k-1} V^i B_j^{n+1}(t+\delta) \\ &= \sum_j \left[\frac{1}{k} \sum_{i=j-k+1}^j V^i \right] B_j^{n+1}(t+\delta) && \text{por rearranjo de termos} \end{aligned}$$

completando a prova.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

A extensão dos resultados alcançados neste trabalho para o caso geral de *B-splines* não uniformes é possível e está em andamento (Persiano[90]). Nesse caso a sequência de nós da *spline* filtrada é mais numerosa que a da original, exigindo a aplicação de algoritmos de inserção múltipla de nós (Cohen[80], Bartels[87]) para o cálculo dos pontos de controle da curva ou superfície filtrada.

A experimentação de outros filtros é ainda objeto de pesquisa. Muito embora a aplicação do filtro descrito conduza a um algoritmo de filtragem extremamente simples, é de se esperar que filtros de ponderação não uniforme apresentem resultados melhores. O fato ressaltado, de que os pontos de controle da curva ou superfície filtrada são resultantes da filtragem discreta dos pontos de controle originais, sugere que lancemos mão de filtros ponderados discretos sobre os pontos de controle. Apesar dessa alternativa oferecer resultados convenientes do ponto de vista prático, resta estabelecer, se alguma, que tipo de filtragem contínua sobre a forma gera os mesmos resultados.

Finalmente, vale notar que a relação entre o resultado da filtragem e a solução ótima dos métodos de otimização (Lott[88]) não é clara. A filtragem reduz sensivelmente a curvatura média da superfície em casos não patológicos, entretanto, não conhecemos qualquer critério envolvendo a curvatura que seja minimizado pela filtragem.

BIBLIOGRAFIA

- DE BOOR, C.: *Practical Guide to Splines*. Springer Verlag, 1978.
- FARIN, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, Boston, 1988.
- LOTT, N.J. and PULLIN, D.I.: Method for Faring B-spline Surfaces. *Computer Aided Design*, vol.20,n.10,dez. 1988.
- NOWACKI,H. and REESE,D.: Design and Fairing of Ship Surfaces. In: Banhill and Boehm: *Surfaces in Computer Aided Design*. North Holland, Amsterdam, 1983.
- PERSIANO,R.: Curve and Surface Smoothing. (em preparo)
- COHEN,E., LYCHE,T. and RIESENFELD,R.: Discrete B-spline and Subdivision Techniques in Computer-Aided Geometric Design and Computer Graphics. *Computer Graphics and Image Processing*.vol 14(2), out.80.
- BARTELS,R.,BEATTY,J and BARSKY,B.: *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann Publ. Califónia,1987.
- ROGERS,D. and FOG,N.: B-spline Curve and Surface Fitting. *Proceedings of the 6th Conference on Computer Application in the Automation of Shipyard Design (ICCAS 88)*, Shangai, China, 1988.