

INTERPOLAÇÃO DE CURVAS E SUPERFÍCIES POR SPLINES DE GRAU ARBITRÁRIO

Milton Teruaki Suetsugu Sakude

Divisão de Ciência da Computação

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) - C.T.A.

CEP 12225 - São José dos Campos - S.P.

RESUMO - É bastante conhecida a interpolação de curvas pelo método spline cúbico. Este artigo apresenta uma generalização da interpolação de curvas e superfícies por splines de grau arbitrário usando a base B-spline. Semelhante ao spline cúbico, pelo método proposto consegue-se um elevado grau de continuidade das derivadas nas junções dos polinômios.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos de interpolação são utilizados quando se deseja que a curva (ou a superfície) passe pelos pontos dados. Vários métodos têm sido desenvolvidos, dentre os quais podem-se citar: o de "parabolic blending" (Overhauser, 1968), o de *Akima* (Akima, 1974), o de *Hermite* (Kochanet & Barbers, 1984), o de *Catmull-Rom* (Catmull & Rom, 1974) e o spline cúbico (Rogers, 1976). Desses, a curva obtida pelo método spline cúbico atende a definição matemática da curva *spline*, ou seja, ser formada por pedaços de polinômios de grau k com continuidade de derivadas de ordem $k-1$ nas junções entre os segmentos. O método B-spline pode atender a definição acima, porém não é um método de interpolação.

Talvez a mais bem conhecida técnica de interpolação de superfícies foi desenvolvida por *Coons* (Coons, 1967). Apesar de sua formulação ser genérica, o seu uso prático em ambientes CAD tem sido limitado a de grau 3. Infelizmente, essa abordagem requer a especificação de derivadas paramétricas, incluindo o intratável vetor de torção (derivada mista).

Bezier (Bezier, 1972) introduziu um método que gera uma superfície definida completamente por um conjunto de pontos de controle no espaço. Uma desvantagem desta abordagem é que o número de pontos de controle determina a ordem (grau do polinômio) da representação. Uma representação com alto grau de polinômio requer um elevado número de cálculos, além disso, o controle do formato da superfície torna-se mais difícil. Geralmente, a superfície é representada pela junção de pequenos pedaços de superfícies de determinada ordem. Manter a continuidade das derivadas nas junções interativamente é trabalhosa. Este problema pode ser evitado com o uso de superfícies B-splines. A formulação B-spline é uma generalização da de Bezier, com a possibilidade da escolha do grau do polinômio e com a vantagem de possuir controle local. Assim como a superfície de Bezier, a superfície B-spline não interpola a matriz de pontos fornecida.

Neste trabalho utiliza-se a base B-spline para a interpolação de

curvas e superfícies, generalizando a interpolação por splines de grau arbitrário. É tratada a interpolação de curvas (e superfícies) abertas e fechadas. Uma das aplicações é a técnica denominada "skinning (lofting)" para geração de superfícies por interpolação de uma família de curvas, presente em ambientes de CAD sofisticados.

2. B-SPLINES

A formulação B-spline deve-se a *de Boor* (de Boor, 1972), *Gordon* e *Riesenfeld* (Gordon e Riesenfeld, 1974) e outros. Uma curva paramétrica B-spline de ordem k é uma curva polinomial por pedaços dada por :

$$s(u) = \sum_{i=0}^n d_i N_i^k(u) \quad (1)$$

onde d_i ($i=0, \dots, n$) são os pontos de controle, $N_i^k(u)$ são denominados funções de base e dados pela relação de recorrência:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$N_i^r(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+r} - u_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{u_{i+r+1} - u}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u)$$

com $0/0=0$ se $u_i = u_{i+1}$.

u é denominado vetor nodal, com índices $i=-k, \dots, m+k$, e o intervalo $[u_i, u_{i+1}]$ ($i=0, \dots, m-1$) define o domínio dos pedaços do polinômio. Para curvas abertas m vale $n-k+1$ e para curvas fechadas, m vale $n+1$.

Para um espaçamento de nós uniforme e com valores inteiros, o parâmetro u vai de 0 a $n-k+1$ para curvas abertas e, de 0 a $n+1$ para as curvas fechadas. No caso de curvas abertas, para forçá-las a passarem pelos pontos extremos, usa-se k nós múltiplos nas extremidades do vetor nodal, por exemplo, para $n=4$ e $k=3$, o vetor nodal seria $[0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2]$, se a curva fosse fechada, seria $u = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9]$. O intervalo $[0, 1]$ define um segmento de polinômio e o intervalo $[1, 2]$ define um outro, em cuja junção são contínuas as derivadas de ordem até $k-1$. A ordem de continuidade numa junção pode ser diminuída impondo-se nós múltiplos $u_i = u_{i+1}$.

Na avaliação da equação (1) somente $k+1$ funções de base são não nulos, ou seja, um ponto da curva é influenciado por $k+1$ pontos de controle, o que dá a propriedade de controle local.

A superfície B-spline é definida pelo produto tensor de curvas B-spline:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n d_{ij} N_i^{k_1}(u) N_j^{k_2}(v) \quad (2)$$

As propriedades das curvas B-splines devem ser estendidas para as superfícies.

3. Interpolação de Curvas

Dado um conjunto de pontos e escolhido o grau do polinômio, o aspecto de uma curva B-spline depende ainda da escolha dos valores do vetor nodal. A curva obtida por interpolação usando B-spline é também sensível a este fato.

O problema da interpolação pelo método B-spline é obter os pontos de controle de uma curva B-spline que passa por um conjunto de pontos fornecidos. Discute-se a seguir algumas abordagens para a solução do problema.

Dado um conjunto de pontos P_i ($i=0, \dots, m$), uma das abordagens usada (Woodward, 1988) é resolver o sistema de equações:

$$s(u_j) = \sum_{i=0}^n d_i N_i^k(u_j) = P_j \quad j=0, \dots, m \quad (3)$$

Para curvas fechadas, os pontos de controle são identificados de forma circular, com isso o número de equações coincide com o número de pontos de controle a serem determinados.

No caso de curvas abertas, existem $m+1$ equações e é necessário obter $n=m+k$ pontos de controle. O sistema deve ser, então, completado por $k-1$ equações. Geralmente, o sistema é completado por algumas condições de contorno, tais como derivadas e curvaturas. Por exemplo, para o grau 3, bastam as condições de tangência (derivada primeira) nas extremidades. Para graus maiores, é necessário especificar (ou estimar) derivadas mais elevadas de significados práticos difíceis.

Como a parametrização pelo comprimento de arco é computacionalmente caro, é comum a parametrização em função da distância entre dois pontos consecutivos para se obter uma curva coerente com a distribuição dos pontos. Para utilizar esta abordagem deve-se escolher o vetor nodal em função da soma acumulada das distâncias entre dois pontos consecutivos.

Para contornar as dificuldades referentes às condições de contorno, será usada uma outra abordagem: associar a cada ponto base P_i , agora i de 0 a n , um valor de parâmetro t_i , usando em princípio um espaçamento uniforme para o vetor nodal, e resolver o sistema de $n+1$ equações:

$$s(t_j) = \sum_{i=0}^n d_i N_i^k(t_j) = P_j \quad j=0, \dots, n \quad (4)$$

Pode-se escolher os parâmetros t_i com espaçamento uniforme ou segundo a distância acumulada entre os pontos para se obter um melhor aspecto da curva (fig.1). No caso de curvas abertas, algumas condições de contornos nas extremidades podem ser acrescentadas, à semelhança da abordagem anterior, com a vantagem de não requerer $k-1$ condições.

As resoluções dos sistemas (3) e (4) podem ser feitas pelo método de Gauss. Como cada equação tem apenas $k+1$ termos não nulos, a triangularização pode ser otimizada evitando cálculos com os termos nulos. Usando a parametrização pela distância acumulada para t_i e o espaçamento uniforme para u_i , a resolução do sistema por Gauss pode falhar quando a

distribuição dos pontos é bastante irregular e as distâncias relativas são desproporcionais. Este problema pode ser contornado escolhendo valores de u_i , não uniformes, próximo de alguns t_i , por exemplo pela média dos k t_i mais próximos.

A figura 2 mostra as diferentes curvas obtidas a partir de um mesmo conjunto de pontos. Todas as curvas tem o mesmo vetor nodal e mesmo grau (3). Na curva a foi usada o espaçamento uniforme para o parâmetro t_i , na curva b, o parâmetro t_i é tomado segundo a distância acumulada entre os pontos e na curva c é feito um melhoramento no formato da curva b acrescentando um vetor tangente na direção vertical em cada extremidade.

A figura 3 mostra diferentes curvas splines obtidas a partir de um mesmo conjunto de pontos variando o grau da curva.

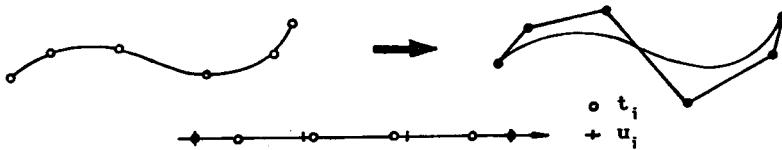


Figura 1. Interpolação de curvas por B-splines.

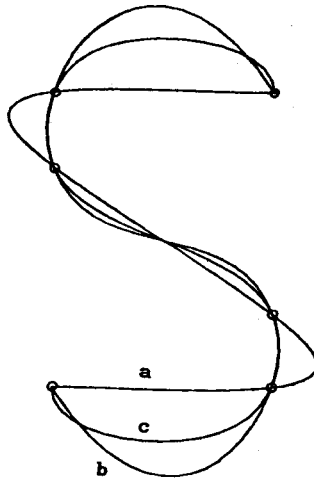


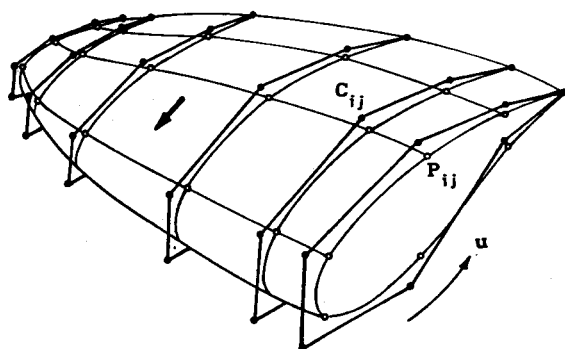
Figura 2. Interpolação por splines de grau 3: (a) parametrização uniforme (b) parametrização segundo a distância acumulada e (c) modificação da curva b pela introdução de vetores tangentes verticais.

$$C_{ij} = \sum_{j=0}^n d_{ij} N_j^k(u_j), \quad i=0, \dots, m.$$

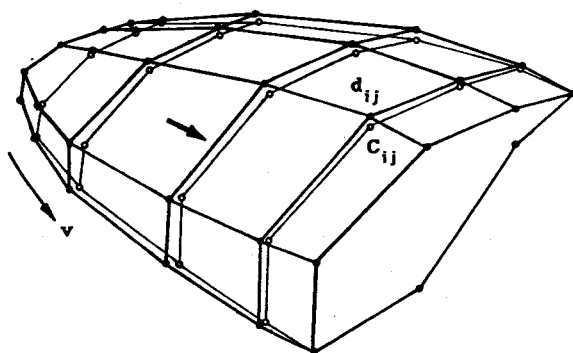
A figura 4 ilustra o processo.

No processo de interpolação de superfícies, uma família de curvas isoparamétricas é obtida para dar origem aos pontos de controle da superfície. Ao invés da superfície originar-se de uma matriz de pontos, ela poderia ser interpolada diretamente de uma família de curvas construída interativamente. Este método é tradicionalmente chamado de "lofting", recentemente denominado "skinning".

Pode-se interpolar curvas com número de pontos de controle diferentes. É necessário igualar o número de pontos através de inserção de nós, usando, por exemplo, o algoritmo de Boehm (Boehm, 1980). Os vetores nodais das curvas das secções devem ser iguais, o que pode ser conseguido através da inserção de nós.



a)



b)

Figura 4. Interpolação de superfícies a) Interpolação de curvas isoparamétricas b) Determinação dos pontos de controle da superfície.

Para tornar o método utilizável em ambientes CAD, deve ser resolvido o problema de definição interativa de curvas no espaço. A definição de uma curva inicial em um plano daria uma visão melhor ao usuário. Uma técnica utilizada para guiar as secções da superfície para o espaço 3D é fazê-las acompanhar uma curva "spine" (espinha dorsal). São utilizadas transformações de rotação e translação baseadas em um ponto da curva (ponto de alinhamento) e a sua tangente (normal ao plano). Os planos definidos são alinhados baseados em um dos eixos x y z. A interpolação de superfície é feita antes da transformação de acompanhamento da curva "spine". O método é discutido detalhadamente em *Woodward* (Woodward, 1988).

A figura 5 exemplifica a técnica "skinning". A figura a mostra as curvas das secções, obtidas por interpolação, e a curva "spine". A figura b mostra o alinhamento das secções no eixo z, a interpolação de superfície se dá nesta situação. As figuras c e d mostram as curvas isoparamétricas das superfícies.

5. CONCLUSÕES

O método aqui apresentado generaliza a interpolação por curvas splines, amplamente divulgada apenas usando o grau 3 (spline cúbico). A continuidade de derivadas da definição de curvas splines é conseguida em razão de gerar curvas B-splines com estas características. A abordagem apresentada possibilita a interpolação de curvas sem a necessidade de fornecer condições de contorno nas extremidades.

A interpolação de superfícies usando B-spline possibilita obter superfícies com alto grau de continuidade de derivadas.

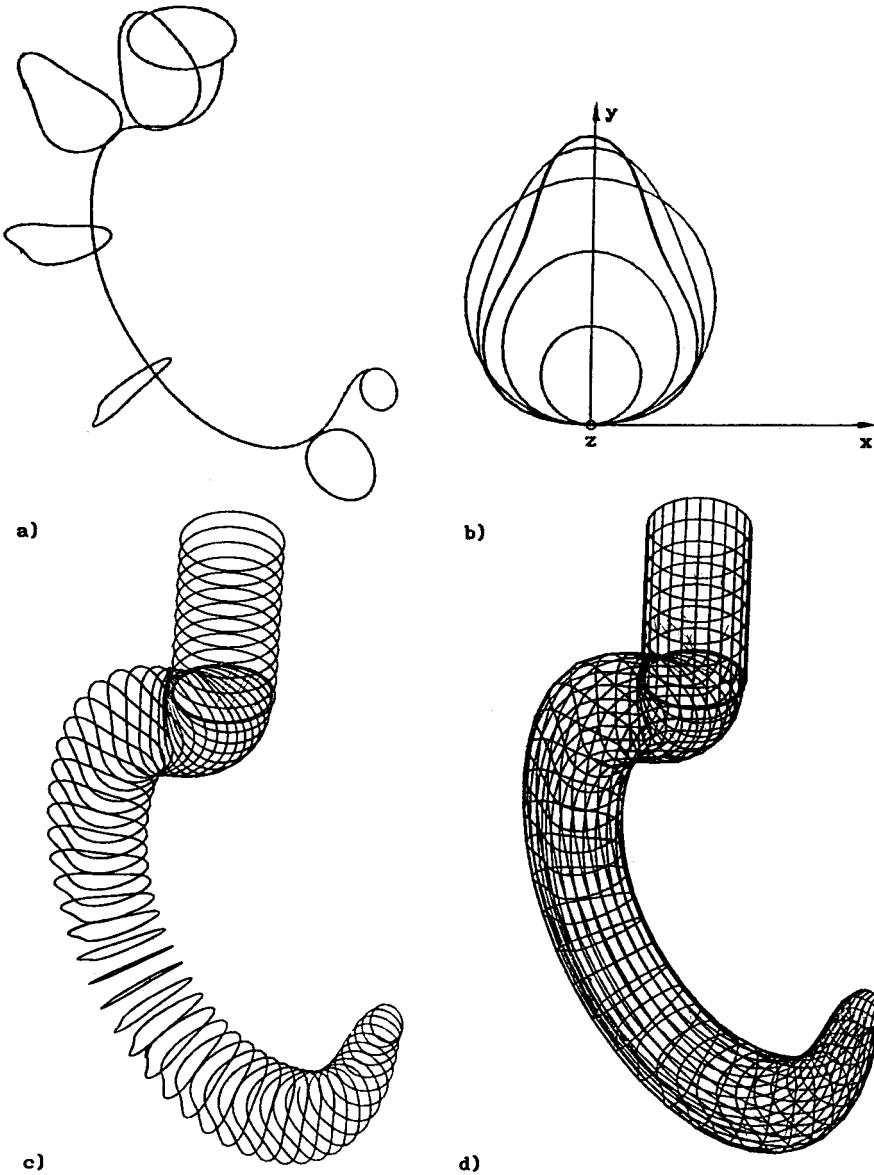


Figura 5. Interpolação de superfícies pela técnica "skinning": (a) curvas das secções e a curva "spine" (b) alinhamentos das secções para interpolação (c) curvas isoparamétricas transladadas segundo a curva "spine" e (d) curvas isoparamétricas com u constante e com v constante.

6. BIBLIOGRAFIA

- AKIMA, H. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting based on local procedure. *Communications of ACM*, 1(17): 18-31, 1974.
- BARSKY, B.A & GREENBERG, D.P. Interactive surface representation system using a B-spline formulation with interpolation capability. *Computer Aided Design*, 14(4):187-194, 1982.
- BARTELS, R. H. et al. *An introduction to the use of splines in computer graphics*. Morgan Kaufman, 1987.
- BEZIER, P. *Numeric control-mathematics and applications*. London, Wiley, 1972.
- BÖHM, W et al. A survey of curve and surface methods in CAGD. In: *Computer Aided Geometric Design*, 1:1-60, 1984.
- DE BOOR, C, On calculating with B-splines. *J. Approx.Theory*, 6:50-62, 1972.
- DE BOOR, C. *A practical guide to splines*. New York, Springer-Verlag, 1978.
- CATMULL, E.E. & ROM, R.J. A class of local interpolating splines. In: Barnhill, R.E. & Riesenfeld, R.F. *Computer aided geometric design*. New York, Academic Press, p. 317-326, 1974.
- COONS, S.A. *Surface for computer aided design of space forms*. MAC-TR-41, Massachusetts, MIT, 1967.
- FARIN, G. *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*. Boston, Academic Press, 1988.
- GORDON, W. & RIESENFELD, R.E. B-spline curves and surfaces. In: Barnhill, R.E. & Riesenfeld, R.F. *Computer aided geometric design*. New York, Academic Press, p. 95-126, 1974.
- KOCHANET, D.H.U & BARTELS, R.H. Interpolating spline with local tension, continuity and bias control. *Proc. SIGGRAPH'84, Computer Graphics*, 18(3):33-41.
- MAGNENAI-THALMANN, N. & THALMANN, D. *Image synthesis: theory and practice*. Tokyo, Springer-Verlag, 1987.
- NEWMAN, W.M. & SPROULL, R.F. *Principle of interactive computer graphics*. Tokio, McGraw-Hill, 1984, 2.ed.
- OVERHAUSER, A.W. Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending. TR SL68-40, *Scientific Research Staff Publications*, Ford Motor Co., 1968.
- ROGERS, D.F & ADAMS, J.A. *Mathematical elements for computer graphics*. New York, McGraw-Hill, 1976.
- WOODWARD, C.D. Skinning techniques for interactive B-spline surface interpolation. *Computer Aided Design*, 20(8):441-451, 1988.