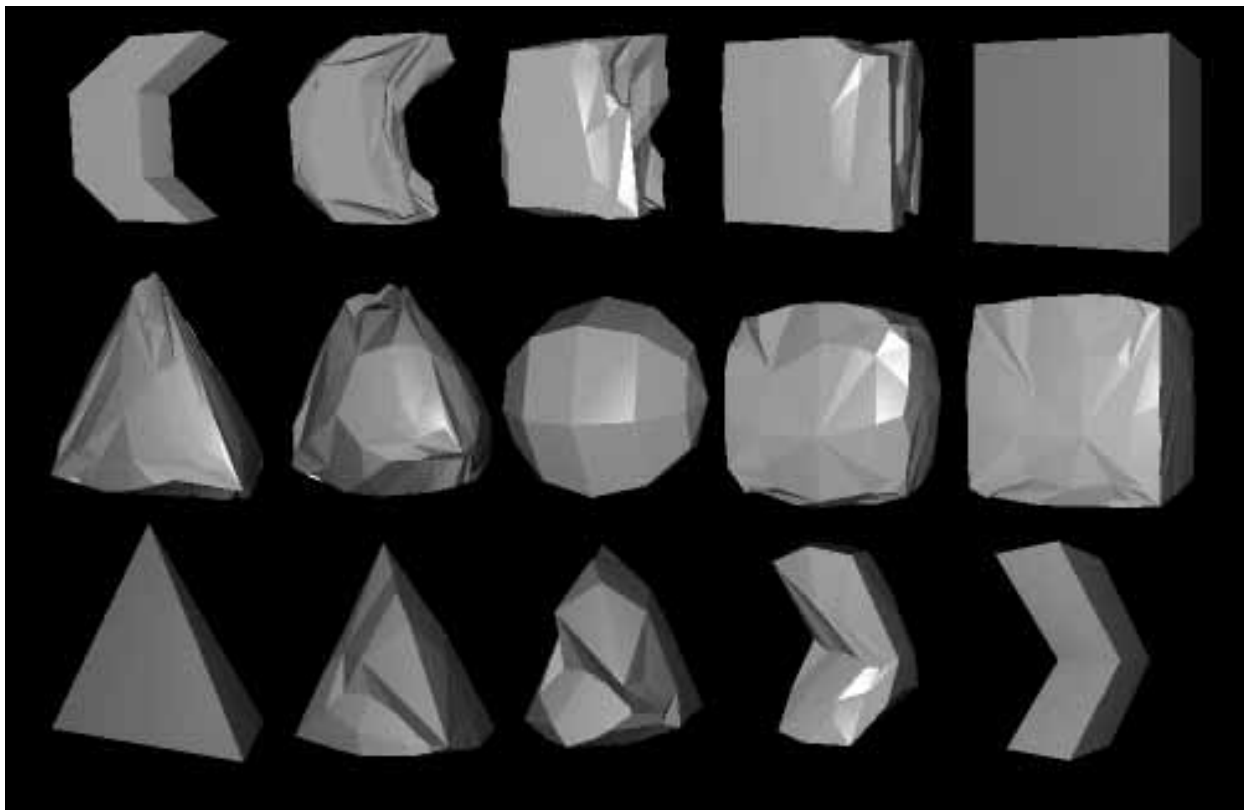
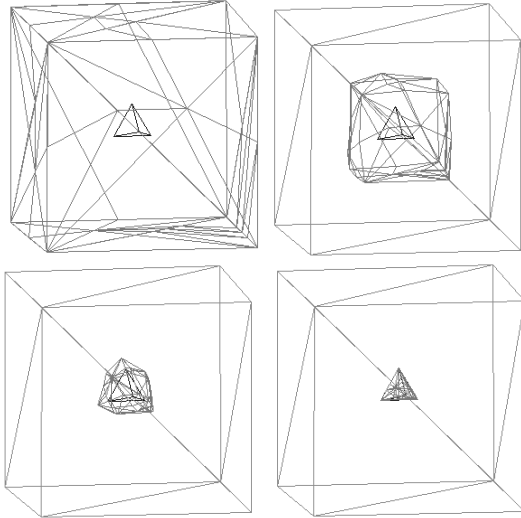


**Figura 8** - Metamorfose final entre o cubo e o tetraedro. Na primeira sequência é utilizada uma interpolação linear, e na segunda, uma interpolação ao longo das trajetórias.



**Figura 9** - Metamorfose final entre vários modelos poliedrais. Na primeira linha, da esquerda para a direita, um poliedro não convexo é transformado em um cubo. Na segunda linha, da direita para a esquerda, o cubo se deforma, até possuir a forma de uma “esfera de faces planas” e em seguida de um tetraedro. Na última linha, o tetraedro é transformado em outro poliedro não convexo.

modelos intermediários das metamorfoses obtidas por esse processo, principalmente em modelos mais complexos, pode se utilizar gráficos de tempo de acesso conforme descrito em [Cruz96].



**Figura 7** - Interpolação linear dos vértices do modelo único obtido ente o tetraedro e o cubo.

## 9. Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pela bolsa de mestrado cedida ao primeiro autor e pelo suporte parcial através do projeto PROTEM-CC GEOTEC. Agradecemos também aos revisores anônimos do SIBGRAPI pelas sugestões.

## 10. Referências

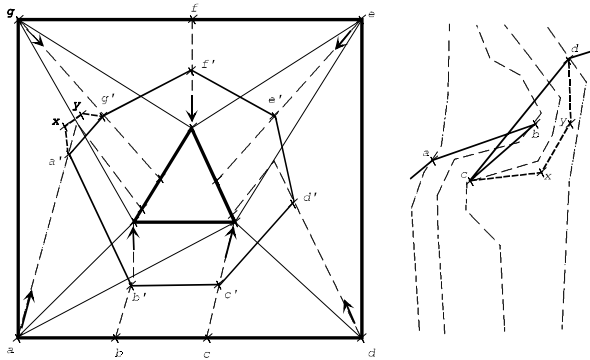
- [Bet89] - Bethel, E. e Uselton, S. (1989). "Shape Distortion in Computer-Assisted Keyframe Animation". Em *State of The Art in Computer Animation*, Magnenat-Thalmann, N. e Thalmann, D., editores, Springer-Verlag, New York, 215-224.
- [Chen89] - Chen, E. e Parent, R. (1989). "Shape Averaging and its Applications to Industrial Design". *IEEE Comp. Graphics and Applications* 9.
- [Cruz96] - Cruz, A. (1996). "Um sistema para Transformação de Contornos". Tese de Mestrado, UFRJ, COPPE sistemas.
- [He94] - He, T., Wang, S. e Kaufman, A. (1994). "Wavelet-based Volume Morphing". *Proceedings of Visualization '94*, 85-91.
- [Hong88] - Hong, T., Magnenat-Thalmann, N. e Thalmann, D. (1988). "A General Algorithm for 3-D Shape Interpolation in a Facet-Based Representation". *Proceedings of Graphics Interface '88*.
- [Hug92] - Hughes, J. (1992). "Scheduled Fourier Volume Morphing". *Proceedings of SIGGRAPH '92*.
- [Kall96] - Kallmann, M. (1996). "Homeomorfismos e Metamorfoses de Modelos Poliedrais Utilizando Campos Vetoriais Definidos em Tetraedrações". Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- [Kaul91] - Kaul, A. e Rossignac, J. (1991). "Solid-Interpolating Deformations: Construction and Animation of PIPs". *Proceedings of Eurographics '91*. In *Computer and Graphics*.
- [Kent92] - Kent, J., Carlson, W. e Parent, R. (1992). "Shape Transformation for Polyhedral Objects". *Proceedings of SIGGRAPH '92*, 47-54.
- [Ler95] - Leros, A., Garfinkle, C. and Levoy, M. (1995). "Feature-Based Volume Metamorphosis". *Proceedings of SIGGRAPH '95*, 449-456.
- [Oliv95] - Oliveira, A., Nascimento, S. e Meerbaum, S. (1995). "Using Fields of Directions Defined on a Triangulation to Obtain a Topology Preserving Continuous Transformation of a Polygon into Another". *Anais do VIII Sibgrapi*, 95-102.
- [Oliv96] - Oliveira, A., Nascimento, S. e Meerbaum, S. (1996). "Morphing Fields of Directions Defined on Triangulations to Morph Simple Polygons". *Abstracts of the 12th European Workshop on Computational Geometry (CG '96)*, Münster, Germany, 117-119.
- [Weat94] - Weatherill, N. P. e Hassan, O. (1994). "Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation With Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints". *Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 2005-2039.

fazer uso de um procedimento de *backtracking*, repondo-se alguns tetraedros anteriormente removidos, ou fazer uma subdivisão local, de forma a permitir que novos tetraedros possam então ser removidos. A complexidade do processo quando se precisa tomar uma dessas providências não é precisamente conhecida.

## 6. A Metamorfose Preservando a Topologia

Uma vez obtido o modelo unificado  $M$  e a bijeção de correspondência  $c$ , os modelos intermediários podem ser gerados com a utilização de uma função de interpolação aplicada aos vértices correspondentes.

Para se garantir a preservação da topologia, e modelos intermediários sem auto-interseções, deve-se utilizar uma função de interpolação pelas trajetórias. Porém, um cuidado adicional deve ser tomado. A figura 6 ilustra o que deve ser feito para o caso bidimensional.



**Figura 6** - Preservando a topologia no caso 2D. As trajetórias só podem interceptar o polígono intermediário nos vértices.

Com relação a figura, a região entre o quadrado e o triângulo está triangulada e com o campo já gerado. As arestas do triângulo foram projetadas seguidamente no sentido inverso do campo até chegarem na fronteira do quadrado. Os vértices das arestas obtidas ao final desta projeção definem o polígono  $P=[a,b,c,d,e,f,g]$  que está sobre a fronteira do quadrado. Então, para cada vértice de  $P$ , foi determinada a sua trajetória projetando-o seguidamente pelo campo até atingir a fronteira do triângulo interno. Estas trajetórias são mostradas em linha tracejada. Agora, só resta interpolar os vértices do polígono  $P$ , com os correspondentes projetados no triângulo. Neste caso, visando realizar a interpolação mantendo a topologia, utiliza-se uma interpolação pelas trajetórias.

Assim, os polígonos intermediários são encontrados fazendo os vértices de  $P$  andarem pelas suas trajetórias até chegarem no triângulo. É mostrado na figura, o polígono intermediário  $[a',b',c',d',e',f',g']$  obtido com  $t=1/2$ . Note que a aresta  $[g'a']$  intercepta a trajetória do vértice  $a$ . É justamente este fenômeno que

deve ser evitado. O que deve ser feito neste caso é a troca da aresta  $[g'a']$  por uma linha poligonal que respeite os limites definidos pelas trajetórias, como a linha poligonal  $[g',y,x,a']$ .

A figura da direita mostra uma situação em que o fenômeno apontado acima causa auto-interseção. A linha poligonal  $[a,b,c,d]$  se auto-intercepta por não respeitar os limites definidos pelas trajetórias, uma solução seria adotar a linha poligonal  $[a,b,c,x,y,d]$ .

Neste caso bidimensional, basta identificar as regiões definidas entre as trajetórias e fazer com que cada aresta do polígono intermediário nunca saia de sua região respectiva. Em [Oliv95], são discutidas as técnicas utilizadas para garantir estas condições.

Para o caso tridimensional, se terá faces que devem respeitar túneis no espaço, que representam cada região que não intercepta nenhuma trajetória.

## 7. Resultados Obtidos

A figura 7 mostra os resultados obtidos com o campo e a tetraedração exemplificados na figura 4. Note o modelo unificado obtido, definido na fronteira do cubo.

Este modelo unificado, que inicialmente possui a mesma forma do cubo, tem as coordenadas dos vértices alteradas por uma interpolação linear, até tomar a forma do tetraedro interior.

A figura 8 faz uma comparação entre as metamorfoses finais obtidas entre o cubo e o tetraedro, utilizando-se uma interpolação linear e uma interpolação ao longo das trajetórias.

A figura 9 mostra o resultado final obtido pela metamorfose entre diversos modelos poliedrais.

Outros resultados podem ser encontrados em <http://www.lcg.ufrj.br/~kallmann/research.html>.

## 8. Conclusões

Neste trabalho, é apresentada uma nova abordagem para a metamorfose entre dois modelos  $M_0$  e  $M_1$  que realiza a transformação por um processo de dilatação.

O processo permite, por exemplo, que se projete as faces de  $M_1$  sobre  $M_0$ . Mesmo aquelas faces que se encontram dentro das concavidades de  $M_1$  de estrutura mais complicada, são projetadas corretamente. Esta característica permite a obtenção de uma transformação contínua entre os dois modelos e também permite que se defina um homeomorfismo entre eles.

Entretanto, se essas concavidades forem muito extensas, isto é, contiverem muitos tetraedros da tetraedração gerada, cuidados especiais devem ser tomados em relação a robustez do processo. Em verdade, a eficiência do processo está vinculada ao número médio de tetraedros que são atravessados pelas trajetórias induzidas pelo campo que passam pelos vértices. Para evitar o excessivo "picotamento" dos

diversas abordagens diferentes. Foi utilizada uma tetraedração de Delaunay dos vértices dos modelos, com posterior tratamento a fim de associar as faces dos modelos às faces da tetraedração, seguindo a abordagem proposta em [Weat94]. É necessário contudo, a utilização de uma estrutura de dados capaz de representar a subdivisão, as restrições das faces, o campo, e diversos outros atributos. A estrutura de dados utilizada, bem como os algoritmos de projeção implementados, são descritos em [Kall96].

### 5. Gerando Campos Admissíveis

Sejam os dois modelos  $M_0$  e  $M_1$ , definidos dentro da tetraedração  $T$ , com  $M_1 \subset \text{int}(M_0)$ . E seja  $U$  igual a região de genus 1, definida por  $\text{int}(M_0) - \text{int}(M_1)$ .

O procedimento para gerar um campo admissível em  $T$ , entrante nas fronteiras de  $U$  é chamado de *escavação topológica* e atribui a cada tetraedro de  $U$ , um vetor direção. Ele pode ser implementado da seguinte forma: Os tetraedros de  $U$  recebem um rótulo que pode ser: *vermelho* ou *verde*. Os tetraedros vermelhos são aqueles nos quais o campo já foi definido, e os demais são verdes. Seja  $F_V$  a fronteira da união de todos os tetraedros verdes. Classifique todos os tetraedros verdes cuja interseção com  $F_V$  é uma variedade bidimensional não nula, como *removíveis*.

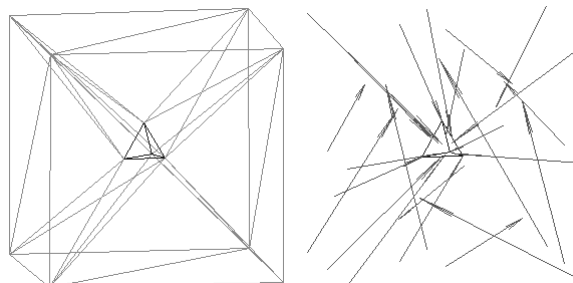
Escolhe-se então um tetraedro removível  $t$ , para ser vermelho. E então é atribuída a  $t$  uma direção de acordo com o número de faces de  $t$  que estão em  $F_V$ . Por exemplo, se for uma única face,  $t$  receberá um vetor que irá do baricentro desta face até o vértice oposto. Se forem duas, o vetor irá do meio da aresta entre estas duas faces até o meio da aresta oposta. Se forem três, o vetor irá do vértice comum às três faces até o baricentro da face oposta.

Com a retirada de  $t$  podem haver tetraedros removíveis que passem a ser não removíveis, e vice-versa. Então é preciso atualizar a situação de todos os tetraedros verdes que são adjacentes a  $t$ . Esta atualização pode ser feita em tempo constante mantendo-se duas listas duplamente encadeadas, uma para os tetraedros que são removíveis, e outra para os tetraedros que não são removíveis. Observe que cada tetraedro verde pode mudar de situação um número finito de vezes antes de ser vermelho.

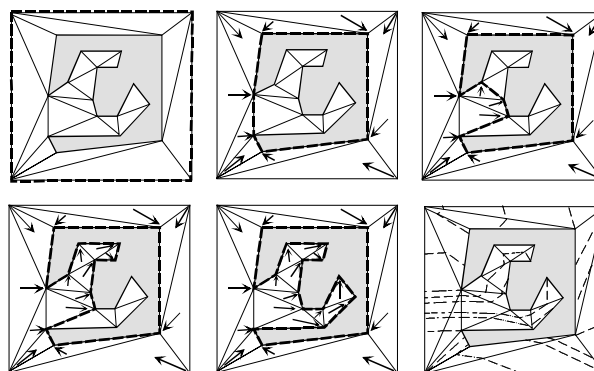
Pode-se atribuir também, *rótulos* aos elementos topológicos dos tetraedros verdes para indicar se eles estão em  $F_V$  ou não. Tendo esses rótulos, o número de vezes em que cada tetraedro de  $U$  é visitado pelo algoritmo pode ser feito em  $O(1)$ . Desta forma, o tempo de execução total do algoritmo pode ser linear com o número de tetraedros em  $U$ .

A figura 4 mostra um campo tridimensional gerado, e a figura 5 ilustra passo a passo o algoritmo

para o caso bidimensional. Note que, neste caso 2D, cada triângulo recebe uma direção do tipo aresta-vértice ou vértice-aresta, dependendo do número de arestas do triângulo comuns a fronteira do contorno corrente.



**Figura 4** - Uma tetraedração entre um cubo e um tetraedro com o campo gerado pelo algoritmo de escavação.



**Figura 5** - O algoritmo de escavação para o caso bidimensional.

A idéia implícita neste processo de escavação pode ter a seguinte interpretação física: imagine que  $M_1$  é um sólido feito de algum material rígido, como madeira, e que  $M_0$  é um sólido feito de algum material elástico, como uma membrana de plástico, com o interior cheio de ar. Uma vez colocado  $M_1$  dentro de  $M_0$ , imagine que é posto um “canudo de refrigerante” na região  $U$  entre os modelos e, pouco a pouco, vai-se retirando todo o ar através deste canudo. Assim,  $M_0$  vai perdendo volume até se tornar uma membrana envolvente de  $M_1$ . Idéias similares a esta já foram utilizadas (ainda sem êxito) a fim de tentar realizar metamorfoses baseadas em modelos físicos, como mencionado em [Kent92].

No caso bidimensional, qualquer que seja a triangulação  $T$  da região delimitada por dois polígonos simples, não é difícil se definir nela um campo admissível.

Entretanto em 3D, um critério “pouco feliz” para escolher o tetraedro removível que será vermelho, pode determinar o término do algoritmo quando ainda existem tetraedros verdes. Nessas situações, pode-se ou

Em particular, a figura 3 mostra a projeção inversa de um triângulo em um tetraedro do tipo aresta-aresta que resulta em um quadrilátero  $[abdx]$ , que foi devidamente triangulado em  $[abx]$  e  $[adx]$ .

Considere agora que  $D$  é entrante em um modelo  $M$  e sejam  $s$  uma das faces triangulares de  $M$  e  $t$  o tetraedro externo a  $M$  que contém  $s$ . Inicialmente,  $\text{proj}_t^{-1}(s)$  é aplicada. A seguir, a cada triângulo  $s'$  de  $T_t^{-1}(s)$ , aplica-se novamente  $\text{proj}_{t'}^{-1}(s')$ , onde  $t'$  é o outro tetraedro contendo  $s'$ , se houver. Prosseguindo com esse processo, se acaba por obter uma triangulação 2D que cobre um subconjunto conexo de  $\partial T$ . A união das triangulações obtidas dessa maneira a partir de cada face de  $M$ , é uma triangulação  $T^*$  que cobre  $\partial T$ .

Seja  $v$  um vértice de  $T^*$  e  $c(v)$  o único ponto pertencente a  $M$  por onde passa a trajetória induzida por  $D$  ao ponto  $v$ . A determinação do conjunto de pontos  $\{c(v) : v \text{ é vértice de } T^*\}$  pode ser embutida no processo de projeção descrito acima a um custo constante por ponto. Conhecendo-se  $c$ , pode-se então construir um homeomorfismo entre  $\partial T$  e  $M$  por uma simples interpolação linear.

Seja  $\lambda$  o número de tetraedros da maior sequência de tetraedros  $(t_i)_{i=0}$ , tais que  $t_i \supseteq_D t_{i+1}$ , e  $n$  o número de tetraedros de  $T$ . A complexidade do processo de projeção acima é de  $O(n\lambda)$ .

Além disso, o processo de projeção descrito acima propicia a obtenção de uma metamorfose entre  $M$  e um outro modelo  $M'$  que o contenha e em relação ao qual  $D$  também seja entrante. Esse tipo de metamorfose será chamado aqui de uma *dilatação contínua* de  $M$  até  $M'$ . É claro que sempre podemos reduzir um modelo o suficiente para fazê-lo caber dentro do outro para então transformá-los por uma dilatação contínua. Entretanto, em alguns casos, a qualidade da mistura (*blending*) das características dos dois modelos pode não ser satisfatória. Contudo, essas dilatações preservam a topologia durante a transformação.

A proposição 2 dada a seguir apenas resume algumas considerações feitas acima e justifica por que *warpings* e dilatações de um poliedro em outro podem ser obtidas com o emprego de campos de direções admissíveis.

**Proposição 2** - Sejam  $T$ ,  $t_p$  e  $M$  como definidos anteriormente. Se existe um campo admissível definido em  $T$ , entrante em  $M$ , então: Existe uma função contínua linear por partes  $f: T \rightarrow \mathfrak{R}^3$  tal que as superfícies de nível de  $f$  incluem  $M$  e  $\partial T$  e são todas homeomorfas. Podemos fazer também com que o poliedro delimitado por  $f^{-1}(k)$  contenha o delimitado por  $f^{-1}(k')$ , se  $k > k'$ .

Na próxima seção se descreverá como estes conceitos foram utilizados para realizar a metamorfose entre dois modelos.

#### 4. Obtendo Homeomorfismos e Dilatações Contínuas

Sejam dois modelos  $M_i$  e  $M_f$  de genus 0. A obtenção do homeomorfismo entre os dois modelos é feita da seguinte forma:

- Utiliza-se uma transformação rígida  $T_R$ , e um escalamento  $T_S$ , obtendo  $M_f' = T_S T_R M_f$ , a fim de que se tenha  $M_f' \subset \text{int}(M_i)$ .
- Triangula-se as faces de  $M_i$  e  $M_f'$  obtendo os modelos equivalentes  $M_{ti}$  e  $M_{tf}$ .
- Faz-se uma tetraedração  $T$  dos vértices de  $M_{ti}$  e  $M_{tf}$ , respeitando as restrições das suas faces.
- Obtêm-se  $M_0$  e  $M_1$ , equivalentes a  $M_{ti}$  e  $M_{tf}$ , respectivamente, resultado das eventuais modificações necessárias para respeitar as restrições das faces dos modelos durante a tetraedração do passo anterior.
- Define-se então um TFD admissível  $D$  em  $T$ , que seja entrante em  $M_0$  e  $M_1$ .
- Projeta-se seguidamente as faces de  $M_1$  pelo sentido inverso, até se obter uma triangulação  $T^*$ , que cobre toda a fronteira de  $M_0$ .  $T^*$  define um modelo equivalente a  $M_0$ , e que será chamado de *modelo unificado*  $M$ .
- Durante o processo acima, pode-se obter, para cada vértice  $v_i$  de  $M$ , seu correspondente  $c(v_i)$  em  $M_1$ .

Assim,  $M$  possui a forma de  $M_0$ , e se trocarmos as coordenadas de cada vértice  $v$  de  $M$  por  $c(v)$ ,  $M$  tomará a forma de  $M_1$ . Basta definir uma função interpoladora entre  $v$  e  $c(v)$  para se obter então a metamorfose.

Pode-se utilizar simplesmente  $f_v: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}^3$ , onde  $f_v(t) = v(1-t) + c(v)t$ , interpolando os vértices linearmente. Isso entretanto não garante a preservação da topologia durante a transformação. Pode-se também, fazer uma interpolação ao longo da trajetória de  $v$ , pela função  $g_v: [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}^3$ , onde  $g_v(0) = v$ ,  $g_v(1) = c(v)$ , e  $g_v(t)$ ,  $t \in (0,1)$ , é um ponto da trajetória entre  $v$  e  $c(v)$ .

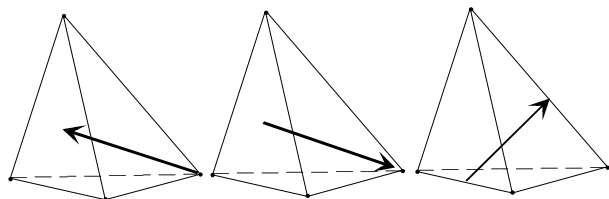
Então, pode-se obter uma metamorfose entre  $M_0$  e  $M_1$  através da função  $m': [0,1] \rightarrow M_T$ , onde  $m'(t)$ ,  $t \in [0,1]$ , é o modelo obtido ao se alterar as coordenadas de cada vértice  $v$  de  $M$  por  $f_v(t)$  ou  $g_v(t)$ .

Para se evitar a aparência de  $M_0$  ir diminuindo de volume até tomar a forma de  $M_1$ , basta interpolar a transformação inversa de  $T_S$  usada para escalar  $M_1$ .

Assim, pode-se obter a função final da metamorfose  $m: [0,1] \rightarrow M_T$  que fica determinada por  $m(t) = ((1-t) I + t T_S^{-1}) m'(t)$ , onde  $I$  é a matriz identidade.

A determinação das matrizes  $T_R$  e  $T_S$  é feita com o auxílio do usuário. A escolha de  $T_R$  permite que o usuário determine a melhor posição relativa entre os dois modelos, a fim de aproximar suas características mais similares.

A triangulação das faces dos modelos é um problema simples, porém, a obtenção da tetraedração com restrições é um problema mais elaborado com



**Figura 1** - Os três tipos de tetraedros classificados pelas suas direções associadas: vértice-face, face-vértice e aresta-aresta.

Classifique agora os elementos topológicos de um tetraedro  $t$  com relação a  $D(t)$  como sendo de *entrada*, de *saída* ou de *tangência*. Um elemento é de entrada se todo ponto dele for origem da sua trajetória em  $t$ . Analogamente, será de saída se todo ponto dele estiver no final de sua trajetória em  $t$ . E se todo ponto do elemento tiver sua trajetória em  $t$  contida inteiramente nas faces de  $t$ , ele será de tangência. Por exemplo, o tetraedro vértice-face possui três faces de entrada e uma de saída, o face-vértice possui uma de entrada e três de saída, enquanto que o aresta-aresta possui duas de entrada e duas de saída.

Uma *trajetória induzida* por  $D$  passando por um ponto  $p$  é uma poligonal orientada  $\gamma \subset T$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- $p \in \gamma$ .
- Se  $\gamma$  intercepta um tetraedro  $t$  de  $T$ , então  $\gamma \cap t$  é a trajetória em  $t$  de algum ponto pertencente a  $t$ .
- $\gamma$  é maximal entre as poligonais orientadas que satisfazem as duas condições anteriores.

Dados  $V$  e  $V'$ , dois subconjuntos de  $T$ , diremos que  $V \leq_D V'$  se existe uma trajetória induzida por  $D$  que intercepta  $V$  antes de  $V'$  ou simultaneamente a  $V'$ . Em particular, se  $a$  é um elemento de entrada de um tetraedro  $t$ , então  $a \leq_D t$ .

Um TFD  $D$  definido em uma tetraedração  $T$  é dito *admissível*, se satisfaz as seguintes propriedades:

- Existe um tetraedro  $t_p$  de  $T$  tal que as trajetórias de  $D$  em  $T-t_p$  começam na fronteira de  $T$  e terminam nas faces de  $t_p$ .
- Duas trajetórias de  $D$  em  $T-t_p$  não possuem pontos em comum.

O tetraedro  $t_p$  é chamado de *tetraedro poço* do TFD admissível  $D$ . Note que todas as trajetórias são linhas poligonais finitas.

Se conhecemos a classificação dos elementos topológicos de cada tetraedro em de entrada, de saída ou de tangência, é possível determinar se um dado TFD é admissível ou não, conforme a proposição abaixo.

**Proposição 1** - Considere que  $U=T-t_p$ . As três condições abaixo são suficientes para que um TFD  $D$  seja admissível. As duas primeiras são também necessárias.

- Todo vértice ou aresta no interior de  $U$  é de entrada para um único tetraedro e de saída para um só outro. Para os demais tetraedros ele é um elemento de tangência.
- Todo vértice ou aresta da  $\partial T$  (alternativamente: da fronteira de  $t_p$ ) é de entrada (é de saída) para um único tetraedro e de tangência para os demais tetraedros de  $U$ .
- A relação  $\leq_D$  definida anteriormente é uma ordem parcial no conjunto de tetraedros de  $T-t_p$ .

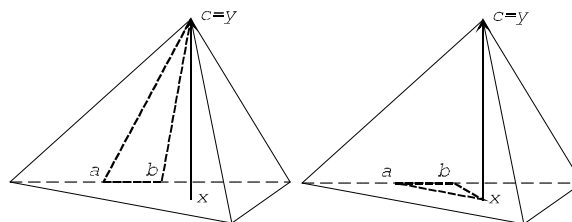
Esta última condição garante que não se tenha a formação de trajetórias cíclicas.

Suponha que  $T$  respeita as restrições das faces triangulares de um modelo  $M$ . Se, para todo ponto  $p$  pertencente a fronteira de  $M$ ,  $D(p)$ , apontar para o interior de  $M$ , será dito que  $D$  é *entrante* em  $M$ .

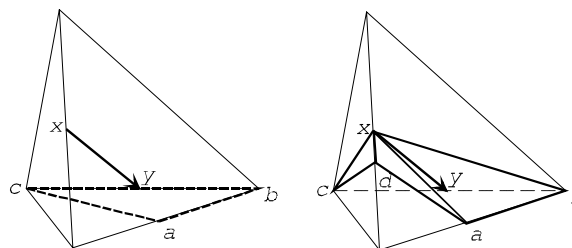
A *projeção* de um ponto  $p$ , pertencente a uma face de entrada de um tetraedro  $t$ , ou  $\text{proj}_i(p)$ , é dada pelo ponto  $p'$ , pertencente a uma face de saída de  $t$ , tal que  $p'$  é a projeção paralela de  $p$  pela direção  $D(t)$ . Obviamente  $\text{proj}_i$  é uma função inversível e  $\text{proj}_i^{-1}$  será chamada aqui pela projeção inversa em  $t$ .

Seja então  $s=[abc]$ ,  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}^3$ , um triângulo contido em uma das faces de saída de  $t$  e  $T_i^{-1}(s)$  uma triangulação 2D que cobre todo o conjunto  $\text{proj}_i^{-1}(s)$ .

As figuras 2 e 3 ilustram diversas possibilidades para  $T_i^{-1}(s)$ . Nestas figuras, a direção do campo no tetraedro é sempre determinada pelo vetor  $y-x$ .



**Figura 2** - Projeção inversa do triângulo  $[abc]$  em um tetraedro  $t$  do tipo face-vértice com  $D(t)=y-x$ , gerando o triângulo  $[abx]$ .



**Figura 3** - Projeção inversa do triângulo  $[abc]$  em um tetraedro  $t$  do tipo aresta-aresta, com  $D(t)=y-x$ , gerando três triângulos projetados  $[abx]$ ,  $[adx]$  e  $[cdx]$ .

correspondência entre seus elementos vértices, arestas e faces.

Nenhuma destas propostas garante que os modelos intermediários gerados não possuam auto-interseções. Outras propostas se baseiam em objetos descritos por representações volumétricas, eliminando-se dificuldades de ordem geométrica. Porém o processamento é mais custoso e fica difícil extrair informações topológicas dos objetos. Alguns destes trabalhos podem ser encontrados em [Ler95], [Hug92] e [He94].

Assim, nenhuma das propostas apresentadas na literatura consegue garantir a preservação da topologia e a obtenção de modelos intermediários sempre consistentes durante a metamorfose. Isto dá uma medida da dificuldade deste problema.

Neste trabalho, é proposta uma abordagem para a obtenção de homeomorfismos e metamorfoses do tipo *dilatação contínua*, entre sólidos de genus 0. Essa abordagem garante a preservação da topologia e a obtenção de modelos intermediários consistentes para um conjunto maior de casos, quando comparada com os demais trabalhos. O objetivo principal deste trabalho consiste em apresentar os princípios básicos utilizados, de maneira relativamente informal. Ao final, apresenta-se diversos exemplos ilustrando o funcionamento dessa metodologia. Resultados teóricos relativos à sua convergência podem ser encontrados em [Oliv95] e [Oliv96], e maiores considerações sobre a implementação dos algoritmos podem ser encontradas em [Kall96].

## 2. Definições e Notações

Considere que um *modelo* é uma representação finita de um sólido pela descrição da sua fronteira. A *topologia* do modelo é dada pelo complexo vértice/aresta/face utilizado para descrever sua fronteira, enquanto que a sua *geometria* refere-se à instância particular obtida ao se especificar as coordenadas dos seus vértices. Vértices, arestas e faces são comumente chamados de *elementos topológicos*.

Dois modelos são considerados *homeomorfos* quando existe uma função bijetiva e contínua entre todos os seus pontos.

Dois modelos homeomorfos serão chamados de *equivalentes* quando, mesmo possuindo complexos vértice/aresta/face diferentes, representam o mesmo sólido. Por exemplo, se uma face de um modelo for subdividida em faces coplanares, se terá um modelo diferente, porém equivalente ao primeiro.

Seja  $M_T$  o espaço de todos os modelos com a topologia induzida pela métrica de *Hausdorff*. O problema de se encontrar a metamorfose entre dois modelos dados  $M_i$  e  $M_f \in M_T$ , consiste em obter a *função de metamorfose*  $m:[0,1] \rightarrow M_T$ , contínua, onde,

$m(0)$  e  $m(1)$  são, respectivamente, equivalentes a  $M_i$  e  $M_f$ .  $m(0)$  é chamado de *modelo inicial*, e  $m(1)$  de *modelo final*. Os modelos  $m(t)$ ,  $t \in (0,1)$ , são chamados de *modelos intermediários*.

Seja  $S$  um conjunto não coplanar de pontos do  $\mathbb{R}^3$  e  $F$  o fecho convexo de  $S$ . Uma *tetraedração*  $T$  de  $S$  é um conjunto não vazio de tetraedros não degenerados com as seguintes propriedades:

- Os vértices de cada tetraedro pertencem a  $S$ .
- Os interiores dos tetraedros são disjuntos.
- Cada face de cada tetraedro ou está na fronteira de  $F$ , ou é comum a dois tetraedros.
- Cada tetraedro não contém nenhum outro ponto de  $S$ , além dos seus vértices.

Dado um modelo  $M$  e uma tetraedração  $T$ , será dito que  $T$  respeita a *restrição das faces* de  $M$  se toda face de  $M$  é também face de algum tetraedro de  $T$ .

Vale ressaltar que nem sempre se pode atender as restrições das faces de qualquer modelo  $M$  dado. Esta dificuldade está vinculada ao fato de que nem todo poliedro pode ser tetraedrado. Porém, para estes casos, pode-se encontrar um modelo equivalente a  $M$  que permita tal operação.

O campo vetorial utilizado será definido em tetraedrações que deverão atender as restrições das faces dos modelos dados, como será visto na seção 3.

## 3. Campos Vetoriais Definidos em Tetraedrações

Um *campo vetorial definido em uma tetraedração (TFD)*  $T$ , é simplesmente uma função que associa a cada tetraedro de  $T$ , uma direção do  $\mathbb{R}^3$ . Considere aqui que um tetraedro  $t$  também contém o seu interior.

Seja  $D$  um TFD definido em uma tetraedração  $T$ ,  $t$  um tetraedro de  $T$  e  $p$  um ponto em  $t$ . A *trajetória* de  $p$  em  $t$  fica definida pela interseção de  $t$  com a reta que passa por  $p$  e é paralela à reta suporte de  $D(t)$ . É a orientação da trajetória é a de  $D(t)$ .

Deste modo, quando nenhuma face de  $t$  é paralela à  $D(t)$ ,  $t$  será de três tipos com relação a  $D(t)$ :

- $t$  é do tipo *vértice-face* quando existir um vértice  $v$  de  $t$ , tal que a trajetória de  $v$  em  $t$ , tenha origem em  $v$  e termine em um ponto pertencente a face oposta de  $v$ .
- $t$  é do tipo *face-vértice* quando existir um vértice  $v$  de  $t$ , tal que a trajetória de  $v$  em  $t$ , tenha origem em algum ponto da face oposta de  $v$ , e termine em  $v$ .
- $t$  é do tipo *aresta-aresta* quando existir uma aresta  $a$  de  $t$ , tal que a trajetória determinada por algum ponto de  $a$  em  $t$ , passa pela aresta oposta de  $a$ .

Considere nesta classificação que as arestas e faces de  $t$  são abertas, de modo que os vértices, arestas e faces de  $t$  definem uma partição da fronteira de  $t$ . A figura 1 a seguir ilustra os três tipos de tetraedros da classificação.

# Metamorfose de Modelos Poliedrais Utilizando Campos Vetoriais em Tetraedrações

MARCELO EUGÊNIO KALLMANN  
ANTONIO ALBERTO OLIVEIRA

Laboratório de Computação Gráfica - COPPE-Sistemas / UFRJ  
21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Caixa Postal 68511  
{kallmann, oliveira}@lcg.ufrj.br

**Abstract.** Many approaches have been proposed to generate a shape interpolation, or morphing, of polyhedral objects in a facet based representation. Most of them focus only the correspondence problem, leaving the interpolation process to just an interpolation of the corresponding vertices. In this paper we present a variation for the 3-dimension space of the technic used in [Oliv96], that uses TFDs (Fields of Directions Defined in a Triangulation). Our algorithm is based on a field of vectors defined in a constrained tetrahedralization of the space between the two objects to be interpolated, after having placed one inside the other. The algorithm guarantees to generate homeomorphisms and a topology preserving continuous transformation between the models. Examples of such transformations involving simple models are presented to illustrate the approach.

**Keywords:** Morphing, Shape Interpolation, Boundary Representation, Triangulation, Tetrahedralization.

## 1. Introdução

O problema da metamorfose, ou *morphing*, entre dois modelos poliedrais, ou sólidos baseados em uma representação por fronteira, consiste em obter uma sequência de modelos intermediários que descreve uma transformação contínua entre os modelos inicial e final.

Sequências geradas por metamorfoses são muito utilizadas para a geração de animações, principalmente pela indústria cinematográfica. Nestas aplicações, o objetivo maior é que a metamorfose possa ser gerada em tempo real e apresente um bom aspecto visual. Outras aplicações também se utilizam de metamorfoses, como na simulação de uma evolução biológica, ou no desenvolvimento de novos produtos, como em [Chen89]. Nestes casos, é necessário utilizar métodos que gerem modelos intermediários sempre consistentes, facilitando, por exemplo, a fabricação de réplicas reais.

A maneira mais comum para se resolver o problema é dividindo-o em dois: o da correspondência, que consiste em determinar para cada ponto da superfície de um dos modelos um correspondente na superfície do outro; e o da interpolação, que consiste em determinar os modelos intermediários, interpolando de forma adequada os pontos definidos previamente como correspondentes.

Diversas abordagens já foram propostas para obter metamorfoses entre modelos poliedrais. Em [Hong88] determina-se inicialmente uma bijeção entre as faces dos modelos de forma a minimizar a distância entre os

baricentros de cada par de faces correspondidas. Faces degeneradas são acrescentadas para igualar o número de faces dos modelos. Então é feita uma interpolação linear entre as faces correspondentes, também acrescentando vértices degenerados para igualar o número de vértices.

Em [Bet89] é descrito um algoritmo que acrescenta elementos degenerados aos modelos até se chegar a um isomorfismo entre os grafos vértice/aresta/face de cada um. Então também é aplicada uma interpolação linear.

Em [Kaul91] é aplicada a *soma de Minkowski* entre os modelos escalados gradualmente. Durante a interpolação, enquanto um é escalado de 0% a 100%, o outro é simultaneamente escalado de 100% a 0%. Uma vez que a soma de Minkowski entre dois poliedros é outro poliedro, pode-se ter modelos intermediários consistentes. Porém, esse não é um processo fácil em representações por fronteira. Além disso, não é possível garantir que a topologia seja preservada durante a transformação. O algoritmo proposto em [Kaul91] não evita que se obtenha modelos com faces desconectadas ou modelos com auto-interseções. No entanto, eles se tornam visualmente corretos quando *renderizados*, pois garante-se que as inconsistências permanecem no interior do modelo.

Em [Kent92] é descrito um método para realizar a metamorfose entre sólidos com genus 0 (homeomorfos à esfera). Os dois sólidos são inicialmente projetados numa esfera, fazendo-se então a interseção das arestas das duas projeções. Com esta interseção, pode-se obter modelos para os dois sólidos tais que haja uma