

# Construção de Decomposições do Espaço e Objetos Heterogêneos

PAULO ROMA CAVALCANTI<sup>1</sup>  
PAULO CEZAR PINTO CARVALHO<sup>2</sup>  
LUIZ FERNANDO MARTHA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Matemática (CCMN),  
Laboratório de Computação Gráfica - COPPE/UFRJ e  
Projeto Visgraf - IMPA  
UFRJ-Universidade Federal do Rio de Janeiro  
21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil  
Caixa Postal 68511  
roma@lcg.ufrj.br

<sup>2</sup> IMPA-Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
Estrada Dona Castorina, 110  
Projeto Visgraf  
22460-320, Rio de Janeiro, RJ, Brasil  
pcezar,roma@visgrafimpa.br

<sup>3</sup> Departamento de Engenharia Civil e  
ICAD-Laboratório de CAD Inteligente  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rua Marquês de São Vicente, 225  
22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil  
lfm@icad.puc-rio.br

**Abstract.** In this paper we propose a convenient process to construct space decompositions. Those are particularly useful to model heterogeneous objects (different parts of the object may be made of different materials). The process is based upon operators that act on space decompositions, and generalizes the CSG operations traditionally employed in solid modeling.

## Introdução

Em [ROMA93], foi proposto um esquema de representação para a descrição de objetos heterogêneos do espaço tridimensional, baseado no esquema SGC (*Selective Geometric Complex*) [ROSS90]. SGCs fornecem uma formalização conveniente para o processo natural de representar um objeto complexo através de duas etapas: *subdivisão* seguida de *seleção*. Primeiro, o espaço é subdividido de forma hierárquica: o espaço é subdividido em regiões (células de dimensão três), cujos bordos são subdivididos em faces (células de dimensão dois), cujos bordos são subdivididos em arestas (células de dimensão um), cujos bordos são formados por vértices (células de dimensão zero). Depois as células correspondentes ao objeto a ser representado (chamadas de células *ativas*) são selecionadas. A proposta original em [ROSS90] não exigia que todo o espaço fosse subdividido em células, mas em [ROMA93] defende-se a utilização de SGCs *completos* (isto é, nos quais a união de todas as

células é todo o espaço). No restante deste trabalho, assume-se que todos os SGCs sejam completos. Em [ROMA93] demonstra-se que o processo delineado acima (subdividir e selecionar) pode ser adaptado para descrever objetos heterogêneos (formados por diversos materiais). Neste caso, ao invés de simplesmente selecionar as células ativas, deve-se identificar as células correspondentes a cada material.

A figura 1 mostra um objeto formado por uma barra de um material A (aço, por exemplo) inserida em outra de um material B (concreto, por exemplo). Para representar este objeto através de um SGC, inicialmente subdivide-se o espaço segundo as regiões  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  e as faces, arestas e vértices por elas determinadas. A seguir, as regiões  $R_1$  e  $R_2$  são associadas aos materiais A e B, respectivamente, enquanto a região externa  $R_3$  é mantida inativa. (Em [ROMA93] propõe-se adotar um material *neutro* para estar associado às células que compõem as interfaces destas regiões). Nesse exemplo, todas as células de uma

dada dimensão estão contidas em um espaço afim daquela dimensão (as faces são planares e as arestas retilíneas). A proposta SGC permite que sejam consideradas estruturas mais gerais, onde as células de uma dada dimensão estejam contidas em uma variedade algébrica.

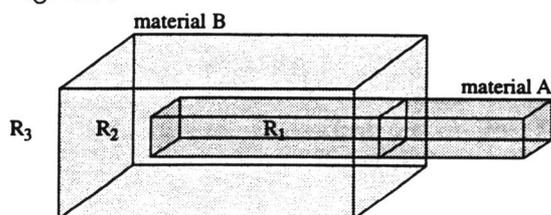


Figura 1 - Um objeto e a decomposição do espaço a ele associada.

No esquema proposto em [ROMA93] é utilizada uma estrutura de dados topológica no armazenamento de SGCs, para possibilitar o aproveitamento da ordenação que pode ser imposta a alguns dos relacionamentos de adjacência presentes em subdivisões do espaço. O esquema usado visa, em primeiro lugar, manter uma representação explícita do bordo das componentes dos objetos e, em segundo lugar, oferecer a possibilidade de implementação de algoritmos geométricos eficientes. Esta forma de representação (representação eficiente de uma subdivisão do espaço, seguida de seleção de células ativas) estende as chamadas representações B-rep (isto é, através do bordo) para sólidos.

O objetivo deste trabalho é propor um processo de construção (processo de modelagem) de objetos heterogêneos, a serem representados por SGCs, que seja adequado às aplicações interativas. Este processo de modelagem é baseado em operadores que agem sobre subdivisões do espaço. Antes da apresentação destes operadores, vai ser feita, na próxima seção, uma breve discussão sobre o que se entende por um processo de modelagem, de forma que o leitor possa avaliar a importância deste tópico. O processo de modelagem talvez seja o ponto mais importante para o uso, na prática, de qualquer sistema interativo de modelagem.

### Processo de Modelagem

Um **processo de modelagem** é uma forma de, a partir de um modelo inicial  $M_0$ , e através de refinamentos sucessivos, produzir modelos intermediários  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  até que se atinja o modelo (satisfatório) final  $M_n$ . O ideal é que  $M_0$  esteja o mais próximo possível de  $M_n$  e que as operações de refinamento sejam as mais poderosas possíveis, de forma

a minimizar o número de modelos intermediários. A pergunta a ser respondida é: qual a forma mais apropriada de obter, interativamente, cada modelo, a partir do seu antecessor?

Em [ROMA91], foi apresentado um processo de modelagem bastante razoável para uma aplicação bidimensional. Naquele trabalho, uma Subdivisão Planar era construída a partir de segmentos de curva gerados, por exemplo, em uma mesa digitalizadora. No entanto, em modelagem tridimensional, como na construção de uma Subdivisão Espacial [ROMA92b], o processo análogo não é satisfatório: ninguém deseja (ou tem paciência para) construir um objeto especificando retalhos de superfície.

A necessidade de um processo de construção para sólidos mais adequado (do que a especificação direta de sua superfície) é amplamente reconhecida na área de modelagem de sólidos. O popular esquema de representação B-rep padece desta dificuldade e, de um modo geral, modeladores baseados neste esquema trazem ferramentas de modelagem mais adequadas.

O processo de modelagem CSG (*Constructive Solid Geometry*) [REQU77] tem sido muito utilizado em modeladores de sólidos, porque apresenta mecanismos de refinamento familiares à maioria das pessoas, a partir do paradigma de esculpimento com massa. Através de operações *booleanas* regularizadas de união, interseção e diferença, determinados primitivos básicos são combinados produzindo objetos cada vez mais complexos. Em certos modeladores, a única representação mantida para estes objetos é a seqüência de construções empregadas (a chamada árvore CSG), não havendo avaliação explícita do bordo. Em outros, o processo CSG é utilizado apenas na especificação dos objetos: uma vez definidos, a árvore de construções é processada de modo a fornecer uma representação B-rep.

No entanto, para construção de SGCs, o processo de modelagem através de construções CSG não funciona porque as operações *booleanas* são definidas para sólidos regulares (homogêneos em dimensão) que dividem o espaço em apenas três regiões: interior, fronteira e exterior do sólido.

Para suprir esta deficiência, Rossignac & Requicha [ROSS91] criaram uma nova classe de objetos, chamados CNRG (*Constructive Non-Regularized Geometry*), e um conjunto de operadores que agem sobre estes objetos. Embora, a exemplo do que ocorre com a proposta CSG, esta abordagem possa ser vista como um novo esquema de representação para subdivisões do espaço, neste trabalho interessa apenas utilizar os operadores CNRG como definindo um processo de modelagem. Estes operadores per-

miem definir operações topológicas e booleanas para SGCs e, conseqüentemente, podem ser empregados para construir subdivisões do espaço.

**Geometria Construtiva Não Regularizada**

Um objeto CNRG é um conjunto de componentes mutuamente disjuntas (talvez desconexas). Uma componente é um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$  (possivelmente não regular). O conjunto de pontos  $pA$ , de um objeto CNRG  $A$ , é a união dos conjuntos de pontos das suas componentes.

Uma árvore CNRG é um grafo dirigido acíclico com uma raiz e representa um objeto. As folhas da árvore são os primitivos CNRG que podem ser compostos por mais de uma componente. Nós internos representam objetos CNRG intermediários obtidos pela aplicação de operações booleanas, topológicas, de simplificação ou de filtragem nos objetos representados pelos seus filhos. Considera-se que uma componente está contida em um objeto quando ela está contida no seu conjunto de pontos.

Os operadores definidos sobre um objeto CNRG são: agregação, unificação, soma, produto, subtração, complemento, interior, fecho, fronteira e regularização. Para distingüí-los dos operadores que agem sobre conjuntos de pontos, são utilizados símbolos diferentes. Assim,  $\cap, \cup, \setminus, I(), \bar{()}, F(), \partial(), R()$  são usados para interseção, união, diferença, interior, complemento, fecho, fronteira e regularização de conjuntos de pontos e  $*, +, -, i, c, k, b, r$  são usados para os equivalentes CNRG. A seguir, apresentam-se os operadores CNRG (fig. 2 e 3) criados por Rossignac [ROSS91]:

• **Agregação**

Dados  $n$  conjuntos de pontos  $A_i$ , a operação de agregação, denotada por  $|$ , cria o objeto CNRG composto pelos  $n$  conjuntos de pontos:

$$A = \{A_1 | A_2 | \dots | A_n\}.$$

• **Unificação**

A unificação  $uA$  cria um objeto com uma única componente: o conjunto de pontos de  $A$  ( $uA = \{pA\}$ ).

• **Complemento**

O complemento  $cA$  é um objeto composto de uma única componente formada pelo conjunto de pontos complementar a  $pA$  ( $cA = \{\bar{pA}\}$ ).

• **Soma**

A soma  $A + B$  é um agregado de componentes formado por:  $A_i \cap B_j, A_i \setminus B_j$  e  $B_j \setminus A_i$  para toda combinação de componentes  $A_i$  de  $A$  e  $B_j$  de  $B$ . A soma produz uma subdivisão de  $(pA) \cup (pB)$  que é compatível com a decomposição de  $A$  e  $B$  em componentes. Note-se que,  $p(A + B) = (pA) \cup (pB)$ .

• **Produto**

O produto  $A * B$  é o agregado de todas as componentes do tipo  $A_i \cap B_j$ . Cada componente  $A_i$  de  $A$  é truncada para  $A_i \cap pB$  e é subdividida (compatibilizada) de acordo com a subdivisão de  $B$  em componentes. Conseqüentemente,  $p(A * B) = (pA) \cap (pB)$ .

• **Subtração**

A subtração  $A - B$  é o agregado de todas as componentes do tipo  $A_i \setminus pB$ . Note-se que,  $p(A - B) = (pA) \setminus (pB)$ .

• **Interior**

O interior topológico  $iA$  de  $A$  no  $\mathbb{R}^n$  é o agregado de componentes  $A_i \cap I(pA)$  que são a interseção das componentes de  $A$  com o interior de  $A$ .

• **Fecho**

O fecho  $kA$  de  $A$  é o agregado composto de todas as componentes de  $A$  mais uma única componente definida como a diferença entre o fecho de  $pA$  e  $pA$  ( $kA = A | F(pA) \setminus pA$ ). Note-se que  $p(kA) = p(iA) \cup p(bA)$ .

• **Fronteira**

A fronteira  $bA$  de  $A$  é definida como:  $bA = kA - iA$ . Note-se que  $p(bA) = \partial(pA)$ .

• **Regularização**

A regularização  $rA$  de  $A$  é definida como  $k(iA)$ . Note-se que  $p(rA) = R(pA)$ .

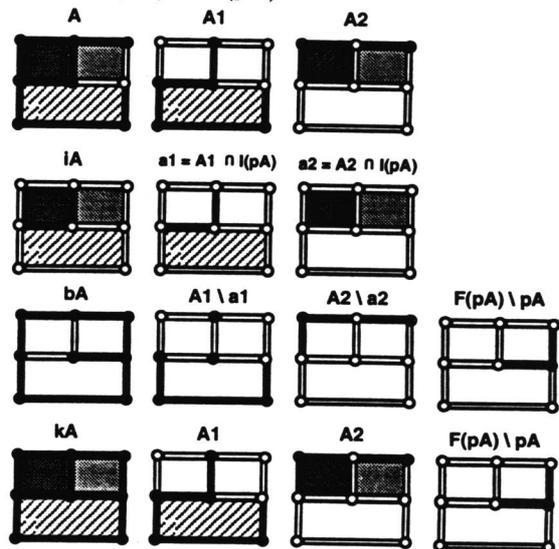


Figura 2 - Operações CNRG unárias (adap. [ROSS91]).

Estes operadores propiciam um processo de modelagem bastante eficiente na interação com o usuário, particularmente em três dimensões. Quando seguidos da operação de unificação eles se comportam exatamente como os respectivos operadores que agem sobre conjuntos de pontos. Entretanto, sem a

unificação, eles retornam um agregado de componentes mutuamente disjuntas.

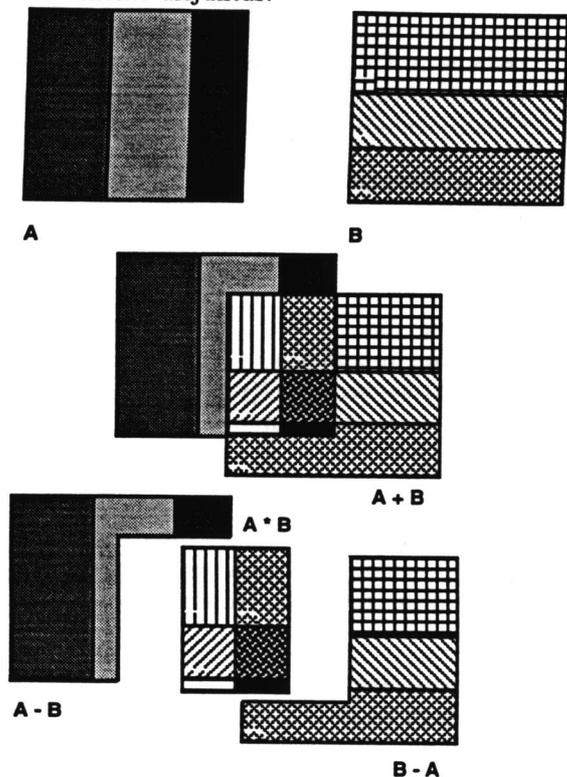


Figura 3 - Operações CNRG binárias.

### Combinação CNRG de SGCs

O conceito de CNRG apresentado na seção anterior é absolutamente geral: sobre as componentes de um objeto CNRG só se exige que elas sejam disjuntas. No entanto, CNRGs de especial interesse podem ser obtidos a partir de SGCs, já que um SGC pode ser considerado um objeto CNRG cujas componentes são as suas células ativas. Esta é a decomposição de um SGC em componentes considerada daqui em diante.

Uma das principais propostas deste trabalho é que o processo de modelagem CNRG seja implementado, pelo menos para duas e três dimensões, tendo como esquema de representação objetos SGC. Assim, os operadores CNRG binários e unários são implementados, em duas e três dimensões, a partir da **combinação** de SGCs, conforme descrito a seguir, utilizando a metodologia apresentada em [ROMA92a,ROMA93].

Combinar dois SGCs  $A$  e  $B$  significa gerar um novo SGC  $C$ , compatível com  $A$  e com  $B$ . Isto significa que o complexo geométrico de  $C$  deve ser um refinamento comum aos de  $A$  e  $B$ , ou seja, todas as células de  $C$  devem estar contidas em alguma célula de  $A$  e alguma célula de  $B$ . Além disso, cada

célula do complexo resultante  $C$  recebe um atributo *origem* que assume um entre quatro valores:  $I$ ,  $A$ ,  $B$  ou  $AB$ , conforme as células que a contém em  $A$  e  $B$  (as células de origem) estejam selecionadas ou não.  $I$  indica que ambas as células de origem são inativas,  $A$  ( $B$ ) indica que apenas a célula de origem em  $A$  ( $B$ ) é ativa e  $AB$  indica que ambas as células são ativas. A figura 4 mostra dois SGCs simples (correspondentes às barras do exemplo da figura 1) e o resultado de sua combinação. Uma vez tendo sido classificadas (de acordo com sua origem) as células do complexo combinado  $C$ , o resultado da operação CNRG desejada é imediatamente obtido, bastando ativar as células adequadas, conforme descrito mais adiante.

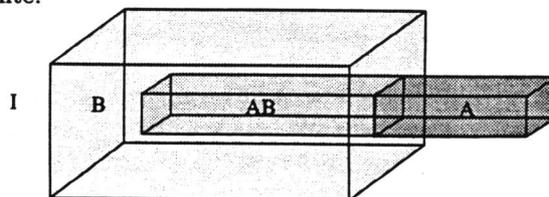


Figura 4 - Combinando SGCs.

O problema crucial na implementação de operadores CNRG para SGCs é, portanto, a combinação de SGCs, que consiste, como visto acima, na obtenção de um refinamento comum seguida de classificação de células conforme a origem. O trabalho desenvolvido em [ROMA92a, 92b] fornece exatamente as ferramentas apropriadas.

Naqueles trabalhos mostrou-se como criar a representação de uma subdivisão espacial (ou seja, o complexo geométrico associado a um SGC) adicionando, um a um, cada retalho de superfície que a define. Para tal, o retalho a ser adicionado e a subdivisão existente devem ser compatibilizados. Isto se faz encontrando a interseção do retalho com as faces e arestas da subdivisão espacial e refinando o retalho e as células intersectadas de modo apropriado (fig. 5). Feito isso, o retalho estará subdividido em sub-retalhos que constituem faces a serem "costuradas" na subdivisão espacial, através das operações topológicas apropriadas.

Este procedimento pode ser facilmente adaptado para executar a combinação de complexos. Os esqueletos de  $A$  e  $B$  (isto é, o conjunto de suas faces e arestas) devem ser compatibilizados por um procedimento análogo ao descrito acima, para que eles possam ser encaixados. São encontradas todas as interseções de faces e arestas de  $A$  com faces e arestas de  $B$ ; cada face ou aresta envolvida em uma destas interseções é refinada apropriadamente. A seguir as

faces e arestas de *B*, já devidamente refinadas, são costuradas em *A*, também já devidamente refinado. À medida que estas células são adicionadas, os seus atributos de origem e os das regiões modificadas por sua inclusão são estabelecidos apropriadamente.

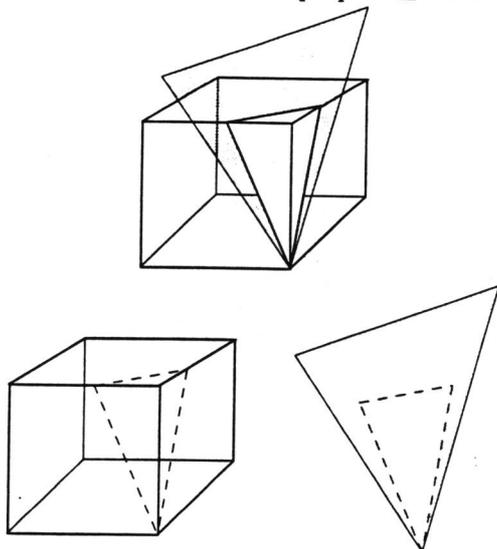


Figura 5 - Adicionando um novo retalho.

Os passos a serem executados são detalhados a seguir e esquematizados na figura 6:

- Refine *A* e *B*, para que eles encaixem um no outro.
- Crie um complexo *C*, idêntico a *A* (já refinado), e coloque no atributo *origem*, de todas as células ativas de *C*, o valor *A*. Nas inativas coloque o valor *I*.
- Adicione a *C* cada faceta (face mais fronteira) de *B*, conforme descrito em [ROMA92b]. Durante a inclusão de uma faceta *F*, para cada célula ativa de *F*, que já existir em *C* e estiver ativa, coloque na sua *origem* o valor *AB*. Para as células ativas que não existirem ou estiverem inativas em *C*, coloque o valor *B*. As regiões criadas neste processo estão inativas.
- Percorra cada região de *C* verificando se ela está contida em alguma região ativa de *A* e/ou de *B* e coloque na sua *origem* o valor apropriado. Esta verificação pode ser feita utilizando apenas informações topológicas (isto é, de adjacência), não sendo necessário recorrer a algoritmos geométricos.

O processo descrito acima classifica cada célula de *C*, de acordo com a sua *origem*. A partir daí, o seletor das células apropriadas, de acordo com esta classificação, produz o resultado esperado.

- Soma: devem ser ativadas todas as células com *origem* diferente de *I*.
- Produto: devem ser ativadas apenas as células com *origem* *AB*.
- Subtração (*A* - *B*): devem ser ativadas as células

com origem *A*.

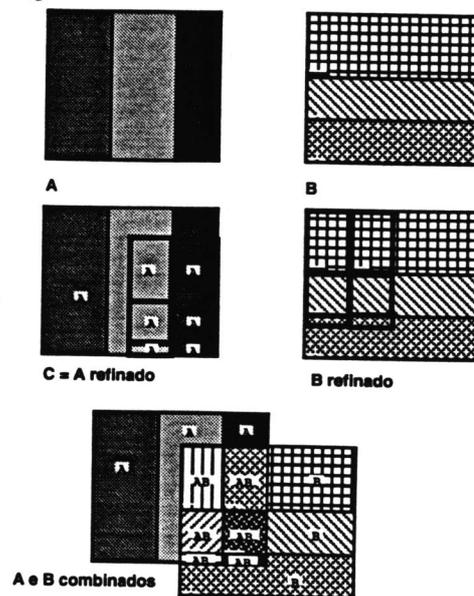


Figura 6 - Combinação de SGCs.

A implementação dos operadores unários é mais simples, já que eles agem sobre um único objeto CNRG. Considerando-se que as suas componentes são as células ativas de um SGC completo *A* e que o seu complemento é formado pelo conjunto de células inativas de *A*, então, cada operador pode ser descrito pelo seletor de determinadas células:

- Interior: para cada célula inativa *c*, desativar todas as células que compõem o bordo de *c*.
- Fecho: para cada célula ativa *c*, ative todas as células que compõem o bordo de *c*.
- Fronteira: é composto pelas células que pertencem ao fecho e não pertencem ao interior de *A*.
- Regularização: é composto pelas células que pertencem ao fecho do interior de *A*.

Assim, mostrou-se que qualquer sistema que implemente SGCs completos pode facilmente fazer operações CNRG unárias. Deve-se ressaltar, porém, que um operador unário (o de unificação) está ausente da lista acima. Este operador não pode ser aplicado a SGCs da forma como foi originalmente definido, já que a união de todas as células ativas não fornece, de modo geral, uma célula válida. No lugar do operador de unificação, o operador adequado para SGCs é o de **simplificação**. Este operador é descrito com detalhes em [ROMA93] e é implementado através de **eliminação** de células inativas desnecessárias para o modelo, **colagem** de células ativas de mesmo suporte cuja fronteira comum é também ativa e **incorporação** de células ativas imersas em uma outra célula ativa. A figura 7 ilustra o processo

de simplificação de um SGC.

As operações CNRG descritas neste trabalho fornecem um elenco poderoso de ferramentas de modelagem para criação e modificação de SGCs. Para implementar tais operações é suficiente, como visto anteriormente, que o sistema seja capaz de compatibilizar SGCs. Uma vez compatibilizados os SGCs, todos os operadores se resumem em ativar e desativar células.

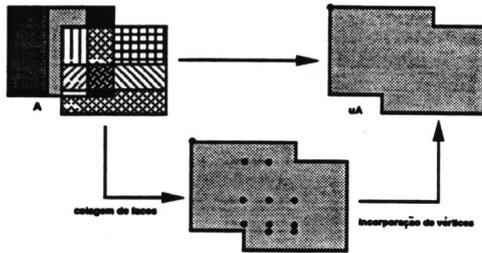


Figura 7 - Unificação de um objeto CNRG.

### Modelagem de Objetos Heterogêneos

Os operadores CNRG descritos na seção anterior são especialmente úteis para a modelagem de objetos heterogêneos, ou seja, compostos por diversos materiais. Considere-se, mais uma vez o objeto da figura 1, constituído por uma barra de aço parcialmente cravada em uma massa de concreto. Como visto anteriormente, tal objeto é naturalmente modelado por um SGC com três regiões: a correspondente à barra de aço, a correspondente à massa de concreto e a região ilimitada. Além disso, tal objeto é facilmente descrito por operadores CNRG. Se  $A$  representa a massa de concreto (sem a inserção da barra de aço) e  $B$  representa a barra de aço, o objeto da figura 1 é dado por  $(A - B) + B$ .

Um outro exemplo é o da figura 8, que apresenta uma estrutura composta por quatro colunas de concreto, quatro vigas de ferro e uma lage, também de concreto, construída a partir de paralelepípedos, devidamente posicionados no espaço.

A criação da estrutura pode ser feita pela operação (CSG) de união, mas o resultado é um objeto com uma única região (fig. 8). Utilizando a operação (CNRG) de soma, obtém-se um total de 21 regiões distintas (fig. 9). Evidentemente, cada uma destas regiões deve ser constituída por um único material. A dúvida na composição surge nas regiões que correspondem a interseção de regiões constituídas por materiais diferentes.

Um possível esquema para que a composição de uma região possa ser determinada de forma automática consiste em atribuir à região um atributo, chamado **fator de dominância**  $fd$ , que estabeleça qual material predomina na operação de interseção. Assim, por exemplo, se o ferro tiver  $fd = 5$  e o

concreto  $fd = 3$ , as regiões correspondentes a interseções de componentes de ferro e concreto serão constituídos por ferro. Note-se que, mesmo que o resultado desejado seja uma estrutura composta por uma única região, ele pode ser obtido pela operação de unificação. Esta unificação é feita eliminando-se as faces que não são usadas pela região externa e as arestas (vértices) que delimitam faces (arestas) com o mesmo suporte.

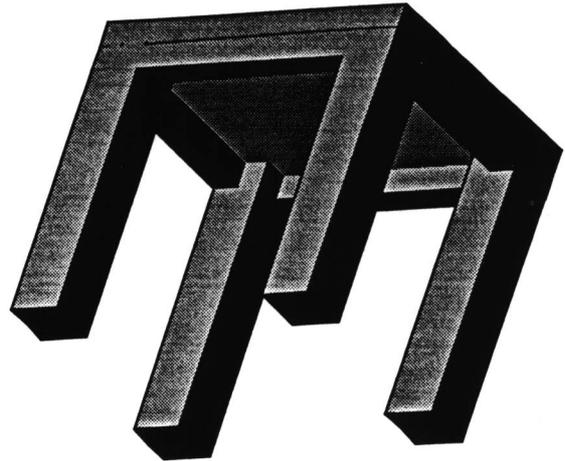


Figura 8 - União CSG.

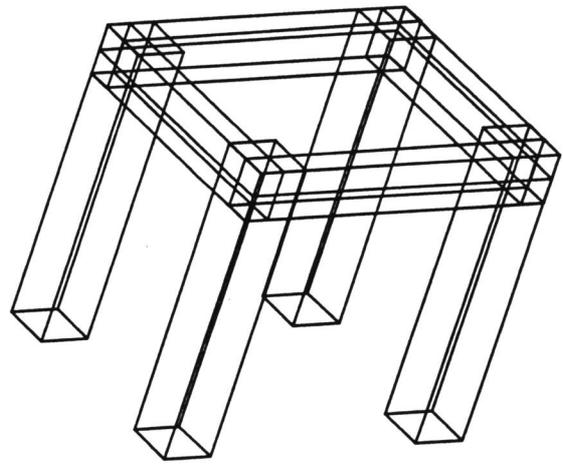


Figura 9 - Soma CNRG.

### Integrando operadores CNRG a modeladores B-rep

Uma característica importante a respeito dos operadores descritos anteriormente é a de que eles podem ser integrados a modeladores B-rep com o intuito de aumentar seu poder de modelagem. Esta integração se dá através de duas rotinas. A primeira é capaz de ler a descrição do bordo de um sólido representado por tais modeladores (necessariamente uma variedade de dimensão dois) e gerar o SGC correspondente, que tem duas regiões. A outra rotina faz

o caminho inverso. Uma vez gerada a representação de um objeto através de operações CNRG, pode-se percorrer cada uma das suas regiões (exceto a externa) e, regularizando-as (eliminando faces pendentes, arames, cascas pontuais), torná-las variedades de dimensão três fechadas (com fronteira). Assim, cada casca (sendo uma variedade de dimensão dois) é assimilável por qualquer modelador de sólidos *manifold* que possua uma representação por fronteira. Isto permite decompor o resultado de uma operação CNRG em uma união disjunta (agregado) de objetos *manifold*, que são retornados ao modelador. Tal extensão foi incorporada ao modelador GeneSys ([FISC91]).

O modelo da figura 1, por exemplo, pode ser gerado pelo GeneSys criando-se, inicialmente, as barras de cada um dos materiais. Tais descrições são lidas e são criados os SGCs  $A$  e  $B$  correspondentes. A seguir, é aplicado o operador CNRG  $(A - B) + B$ , que gera um novo SGC composto por três regiões, sendo duas delas ativas e compostas por materiais diferentes. Finalmente, cada uma das duas regiões é retornada ao modelador, que representa cada região por um sólido diferente. Do ponto de vista geométrico a descrição do objeto é exatamente a mesma dada pelo SGC de origem. É claro, porém, que as informações de adjacência entre as suas partes é perdida nesta conversão.

### Conclusões e Trabalhos Futuros

Os sistemas usuais de Modelagem Sólida encontram dificuldades para modelar objetos heterogêneos. Em [ROMA93] foi proposta uma metodologia de representação de tais objetos utilizando SGCs, que formalizam as subdivisões do espaço estudadas em [ROMA92b]. Neste trabalho, é apresentada uma metodologia para criação de tais modelos, utilizando operações CNRG, que funcionam de modo análogo a operações CSG na criação de modelos B-rep. Mostrou-se que tais operadores podem ser implementados mediante uma adaptação dos procedimentos apresentados em [ROMA92b] para a construção incremental de subdivisões do espaço. Evidenciou-se, também, a possibilidade de agregar tais operadores a sistemas existentes de modelagem, de modo a aumentar seu repertório de técnicas de criação e modificação de modelos.

O principal tópico para pesquisas futuras é a obtenção de algoritmos mais eficientes para a combinação de SGCs. As informações de adjacência de cada SGC a ser combinado são exploradas na obtenção das interseções de seus esqueletos. No entanto, a inclusão das faces e arestas no novo modelo é feita individualmente. Uma melhor exploração das informações de adjacência relativas a cada modelo pode permitir a obtenção de algoritmos de combinação mais eficientes.

### Referências

- [FISC91] Fischer, Rolf - *GeneSys - Sistema Híbrido para Modelagem de Sólidos*. Dissertação de Mestrado, Dep. Informática, PUC-rio, Agosto 1991.
- [REQU77] Requicha, A. - *Constructive Solid Geometry*. University of Rochester, Production Automation Project, Technical Memo. 25, Nov 1977.
- [ROMA91] Roma, P. Cavalcanti & Carvalho P.C. & Martha, L.F. - *Criação e Manutenção de Subdivisões Planares*. Anais do SIBGRAPI IV, 1991, pp 13-24.
- [ROMA92a] Roma, P. Cavalcanti - *Criação e Manutenção de Subdivisões do Espaço*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Dep. Informática, 1992.
- [ROMA92b] Roma, P. Cavalcanti & Carvalho, P.C. & Martha, L.F. - *Criação e Manutenção de Subdivisões Espaciais*. Anais do SIBGRAPI V, 1992, pp 105-113.
- [ROMA93] Roma, P. Cavalcanti & Carvalho, P.C. & Martha, L.F. - *Representação de Objetos Heterogêneos Através de Decomposição do Espaço*. Anais do SIBGRAPI VI, 1993, pp 277-284.
- [ROSS90] Rossignac, Jarek R. & O'Connor, Michael A. - *SGC: A Dimension-independent Model for Pointsets with Internal Structures and Incomplete Boundaries*. Geometric Modeling for Product Engineering, North Holland 1990, pp 145-180.
- [ROSS91] Rossignac, Jarek R. & Requicha, A.G. - *Constructive Non-regularized Geometry*. Computer Aided Design, Vol.23, No.1, 1991, pp 21-32.
- [WEIL88] Weiler, K. - *The Radial-Edge Structure: A Topological Representation for Non-manifold Geometric Boundary Representations*. Geometric Modeling for CAD Applications, North Holland, 1988, pp 3-36.

