

Representação de Objetos Heterogêneos Através de Decomposição do Espaço

PAULO ROMA CAVALCANTI¹
PAULO CEZAR PINTO CARVALHO¹
LUIZ FERNANDO MARTHA²

¹IMPA–Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
pcezar,roma@visgrafimpa.br

²Departamento de Engenharia Civil e
ICAD–Laboratório de CAD Inteligente
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lfm@icad.puc-rio.br

Abstract. In this paper we relate the problem of obtaining convenient representations for heterogeneous objects to the problem of finding certain decompositions of the underlying space. Here, heterogeneity may refer to the fact that local topological properties of the object point set may not be uniform or to the fact that different parts of the object may be made of different materials.

Introdução

Em trabalhos anteriores [ROMA91,ROMA92], discutiu-se a obtenção da descrição topológica de uma subdivisão do plano ou do espaço, a partir da descrição geométrica das curvas e superfícies que as definem. A principal motivação para aqueles trabalhos foi a conexão entre decomposições do espaço e representações de objetos que fogem aos paradigmas mais usuais de Modelagem Sólida. Esta conexão é estudada mais detalhadamente neste trabalho.

Os métodos usuais de Modelagem Sólida (B-rep, CSG) encontram dificuldades para modelar, convenientemente, objetos *heterogêneos*. Esta heterogeneidade tanto pode se manifestar através de propriedades topológicas locais, que variam sobre o conjunto de pontos correspondente ao objeto, quanto através da composição diversa de suas partes. Como exemplo da primeira forma de heterogeneidade, têm-se sólidos com faces ou arestas pendentes. Na segunda categoria, se enquadram os objetos formados por diversos materiais. Este é o caso, por exemplo, de uma viga de concreto com sua armadura de aço, que pode ser vista como um agregado de sólidos, cujos relacionamentos de adjacência devem ser apropriadamente representados. A forma natural para tratar de tais heterogeneidades é subdividir o sólido em partes homogêneas e descrever de que forma estas partes são coladas entre si. Dependendo do problema específico de modelagem, diferentes propriedades são exigidas

das partes que compõem o objeto e da forma como estas partes são combinadas. A decomposição do objeto a ser modelado induz, por sua vez, uma decomposição no espaço. Assim, o problema de modelar um objeto pode ser visto como um processo em duas etapas: subdivisão do espaço, seguida de seleção das partes que interessam ao objeto. Em [CARV92], diversos esquemas de decomposição do espaço são estudados e a aplicabilidade de tais esquemas para modelagem em Computação Gráfica é discutida.

Neste trabalho, emprega-se o esquema de decomposição do espaço, introduzido por Rossignac & O'Connor [ROSS90] na sua proposta de modelagem e representação através de SGCs (*Selective Geometric Complexes*). SGCs permitem representar, de uma maneira bastante geral, uma partição de um subconjunto do \mathbb{R}^n , possivelmente não homogêneo em dimensão, por meio de células sujeitas a determinadas condições. A um conjunto válido de células foi dado o nome de complexo geométrico. Um SGC corresponde então, a um selecionamento de um subconjunto de células de um complexo geométrico. Em [ROSS90], estruturas de dados capazes de representar SGCs são discutidas e operações sobre SGCs relevantes para modelagem são introduzidas.

No que se segue, discutem-se diversos aspectos da modelagem e representação através de SGCs. Faz-se, inicialmente, uma comparação entre as informações de adjacência contidas em um SGC, com

aqueles contidas nas estruturas de dados usualmente utilizadas para representar decomposições do plano e do espaço. Mostra-se, a seguir, que é desejável que sejam considerados apenas SGCs que cubram todo o espaço de modelagem. Depois, discute-se de que forma o mecanismo de seleção e as operações descritas em [ROSS90] devem ser generalizadas para objetos compostos por diversos materiais. Finalmente, propõe-se uma operação de regularização para SGCs.

Complexos Geométricos

Um **complexo geométrico**, ou simplesmente **complexo**, é um conjunto finito de células mutuamente disjuntas, satisfazendo determinadas condições. Uma **célula** é um subconjunto **conexo e relativamente aberto** de algum suporte de uma variedade algébrica. Uma **variedade algébrica (VA)** é o conjunto dos pontos onde um polinômio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se anula⁽¹⁾. Os pontos onde $\nabla f \neq 0$ são chamados **pontos regulares** (os demais pontos são ditos singulares). O conjunto dos pontos regulares pode ser decomposto em subconjuntos conexos, contidos em alguma variedade⁽²⁾ mergulhada no \mathbb{R}^n . Cada um destes subconjuntos é chamado **suporte** (fig. 1).

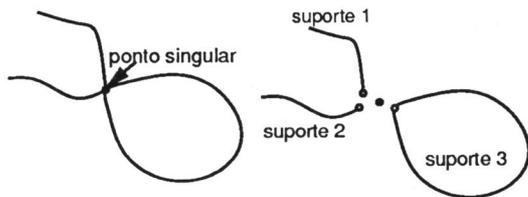


Figura 1 - Decomposição de uma VA.

Na figura 2, todo ponto de V_1 é um ponto regular de dimensão 1. O ponto p_2 é um ponto regular, de dimensão 0, de V e um ponto singular de V_2 . O ponto p_3 é um ponto regular, de dimensão 1, de V_3 e um ponto singular de V_4 ; o ponto p_4 é um ponto regular, de dimensão 2, de V_4 .

A exigência das células possuírem suportes algébricos se deve a existência de métodos computacionais para tratar esta classe de funções. Além do mais, funções algébricas têm sido utilizadas satisfatoriamente para modelar curvas e superfícies do mundo real. No entanto, qualquer outra classe de funções, de variação limitada, poderia ter sido utilizada; por exemplo, funções analíticas. Note-se entretanto que, em ambos os casos, as células possuem classe de continuidade C^∞ . Isto significa que superfícies algébricas por partes não podem ser modeladas como uma única célula de um complexo. Assim,

(1) Em inglês, *algebraic variety*.

(2) Aqui, o termo variedade é usado no sentido usual, ou seja: um espaço topológico cujos pontos possuem vizinhanças homeomorfas ao \mathbb{R}^d para algum d .

por exemplo, uma face de um sólido representada através de uma superfície *spline* deve ser subdividida em retalhos correspondendo a uma única superfície algébrica.

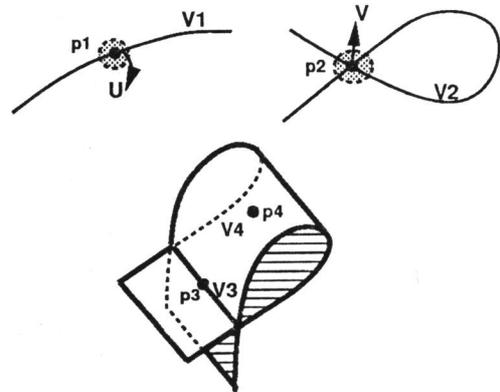


Figura 2 - Pontos regulares e singulares de VAs.

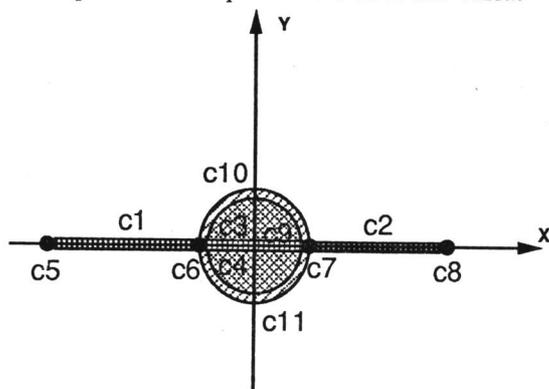
O conjunto de pontos representado por uma célula α é o interior de uma região do seu suporte tendo como fronteira $\partial\alpha$, o conjunto dos pontos do fecho de α que não pertencem a α . A cada célula está associado o único suporte, α .suporte, que a contém como um conjunto aberto **relativo**. Formalmente, um complexo K é, por definição, um conjunto **finito** de células $c_j, j \in J$, satisfazendo às seguintes condições:

- $i, j \in J \Rightarrow c_i \cap c_j = \emptyset$.
- $\forall c \in K, \exists I \subset J$ tal que $\partial c = \cup_{i \in I} (c_i)$.
- $\forall b \in \text{bdry}(c, K), (b \subset c.\text{suporte})$ ou $(b \cap c.\text{suporte} = \emptyset)$.

Os símbolos \cap e \cup denotam a interseção e a união dos conjuntos de pontos correspondentes às células apropriadas. O operador $\text{bdry}(c, K)$ denota o conjunto de células c_i de K tais que $c_i \subset \partial c$. Diz-se que c é **delimitada** por cada c_i , ou, então, que cada c_i delimita c . O operador $\text{star}(c, K)$ denota o conjunto de células c_i de K tais que $c \in \partial c_i$. Diz-se que cada c_i é **incidente** a c (fig. 3).

Na definição acima, a primeira condição determina simplesmente que os conjuntos de pontos de duas células quaisquer devem ser disjuntos. A segunda condição é muito importante e é, justamente ela, que garante que toda célula, em um complexo, possui fronteiras "bem comportadas". Esta condição obriga que as fronteiras das células estejam no complexo e sejam formadas por uma ou mais células (fig. 3). Por conseguinte, toda célula possui fronteiras algébricas por partes. A terceira condição determina que cada célula, na fronteira de uma outra

célula c , deve estar contida no suporte de c , ou, então, sua interseção com o suporte de c deve ser vazia.



- c_1 .suporte = c_2 .suporte = c_9 .suporte $\rightarrow y = 0$
- c_{10} .suporte = c_{11} .suporte $\rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$
- c_3 .suporte = c_4 .suporte $\rightarrow 0x + 0y = 0 (\mathbb{R}^2)$
- c_5 .suporte $\rightarrow (-3, 0)$, c_6 .suporte $\rightarrow (-1, 0)$
- c_7 .suporte $\rightarrow (1, 0)$, c_8 .suporte $\rightarrow (3, 0)$
- $\text{star}(c_6, K) = \{c_{10}, c_1, c_{11}, c_9, c_3, c_4\}$
- $\text{star}(c_9, K) = \{c_3, c_4\}$
- $\text{bdry}(c_1, K) = \{c_5, c_6\}$
- $\text{bdry}(c_3, K) = \{c_9, c_{10}, c_6, c_7\}$
- $\text{adj}(c_6, K) = \{c_5, c_7\}$
- $\text{adj}(c_9, K) = \{c_2, c_{10}, c_{11}, c_1\}$

Figura 3 - Um complexo geométrico.

A figura 1 pode ser encarada como um complexo com quatro células. Embora o ponto singular corresponda a uma célula que está na fronteira de todas as outras, sua interseção com todos os suportes das outras células é vazia.

Da definição de complexo, segue que a união de todas as células de um complexo representa um conjunto fechado de pontos e que, dado um conjunto X de células de um complexo K , $X \cup \text{bdry}(X, K)$ é também um complexo. Além disso, células possuem fronteiras algébricas (por partes).

A **dimensão de uma célula** α , denotada por α .dim, é definida como sendo a dimensão do seu suporte, e a dimensão de um complexo é definida como a dimensão máxima das suas células. Denota-se por $K.\text{cells}(d)$ o conjunto de células de dimensão d do complexo K .

Existe um terceiro operador, chamado **neighborhood**, que define a vizinhança de uma célula de dimensão k em relação a cada célula de dimensão $k + 1$ no seu star. Este operador fornece três valores: **cheio**, **direito** ou **esquerdo**. Quando $b.\text{neighborhood}(c) = \text{cheio}$ é porque a célula b não está na fronteira do fecho topológico de c . Neste caso, diz-se que b é uma fronteira interior de c . Os valores

direito e **esquerdo** indicam de que lado c está em relação a b . O conceito de lado está relacionado com a parametrização de b .suporte.

A preocupação de Rossignac & O' Connor, ao propor o SGC como esquema de representação, foi criar um mecanismo que funcionasse em qualquer dimensão. As informações de adjacência presentes no modelo são exatamente aquelas que independem da dimensão. No caso particular de dimensão 2 e 3, informações adicionais podem ser incluídas na representação, levando em conta que certos relacionamentos de adjacência podem ser ordenados linearmente de maneira coerente. Este fato está ligado à noção de orientabilidade.

A orientabilidade é uma propriedade topológica de uma variedade. Quando a variedade está mergulhada, a orientabilidade está relacionada com a propriedade de separação do espaço (uma variedade de co-dimensão 1 separa, localmente, o espaço).

No caso geral, de dimensão n , somente uma pequena parcela dos relacionamentos de adjacência pode ser representada ordenadamente. Apenas as células do bdry de células de dimensão 1 e 2 podem ser representadas de modo ordenado (isto é, vértices que delimitam arestas ou arestas que delimitam faces). Por outro lado, somente o star de células de dimensão $n - 2$ e $n - 1$ pode ser ordenado. Isto porque, no \mathbb{R}^n , células de dimensão inferior a $n - 1$ não são capazes de dividir o espaço. Isto é consequência do fato de que apenas uma superfície de co-dimensão 1 pode dividir, localmente, o espaço no qual ela está mergulhada (superfícies mergulhadas no espaço tri-dimensional, curvas mergulhadas em superfícies e pontos em curvas). Por exemplo, arestas que delimitam apenas regiões (chamadas, neste caso, de arames) não podem, em geral, ser ordenadas.

Já nos espaços de dimensão 2 e 3 os relacionamentos ordenáveis correspondem a uma parcela considerável do total dos relacionamentos de adjacência. Especificamente no \mathbb{R}^2 , é possível ordenar as arestas em torno de um vértice e, por conseguinte, as faces (delimitadas por estas arestas) que incidem no vértice. Também é possível orientar uma face, ordenando as células (vértices e arestas) na sua fronteira. No \mathbb{R}^3 , ainda é possível manter as faces orientadas e o star de uma aresta (as faces e as regiões delimitadas por estas faces) pode ser ordenado radialmente ao redor da aresta. Porém, não há mais, em geral, uma ordenação possível para as células que incidem nos vértices.

As propriedades vistas acima são exatamente aquelas que permitem a criação de estruturas de dados eficientes para representar subdivisões do plano e do espaço, como é o caso, por exemplo,

das estruturas *winged-edge*, *half-edge* e *radial-edge* [MANT88, WEIL86].

A existência, em dimensão 2 e 3, de certos relacionamentos de adjacência que admitem ordenações lineares está ligada ao fato de que um complexo geométrico é um poliedro topológico (ou seja, pode ser triangulado). Isto é o que garante que é possível orientar, coerentemente, a fronteira das suas faces.

De certa forma, a orientabilidade estabelece uma estrutura para o mergulho de elementos, puramente topológicos, no espaço Euclideano, o que permite utilizar estruturas de dados topológicas para representá-las. Esta estrutura tem-se mostrado bastante útil no desenvolvimento de vários esquemas de representação eficientes.

Para provar que um complexo é triangulável, é preciso conhecer as propriedades topológicas de conjuntos algébricos. A estrutura topológica de conjuntos analíticos (em particular, algébricos) vem sendo estudada desde a década de 30. Os primeiros trabalhos — onde são apresentadas provas detalhadas a respeito da triangulabilidade destes conjuntos — datam do início da década de 60. Lojasiewicz [LOJA64] mostrou que qualquer coleção finita de subconjuntos do \mathbb{R}^n , localmente semi-analíticos, são trianguláveis simultaneamente. Os conjuntos semi-analíticos (semi-algébricos) são aqueles que podem ser dados localmente por inequações analíticas (algébricas). A demonstração deste resultado é bastante técnica e foge ao escopo deste trabalho. No entanto, em dimensão 2 e 3, pode-se utilizar um processo construtivo simples, descrito em [ROMA92a], para decompor um complexo geométrico, de tal forma que as células deste novo complexo sejam homeomorfas ao disco aberto. Neste caso, diz-se tratar de um complexo celular. É um fato conhecido que complexos celulares são trianguláveis.

Este resultado é importante porque mostra que um complexo geométrico representa o mesmo tipo de objeto que podia ser representado pelos modelos de decomposição celular. A diferença fundamental é o que constitui uma célula em cada modelo. O emprego de complexos geométricos evita uma fragmentação excessiva do modelo.

Refinamento de Complexos

A inclusão de novos elementos em um complexo deve ser feita de forma a preservar a validade geométrica e topológica do complexo. Os passos necessários, não só à inclusão como também à combinação *booleana* de dois complexos, requerem a noção de compatibilidade e refinamento.

Refinar um complexo significa produzir um novo complexo que defina uma partição mais fina do

espaço. Assim, o mesmo conjunto de pontos do complexo original é representado com um número maior de células. Já a compatibilidade é a meta a ser atingida através de um processo de refinamento, visando a que a combinação de dois complexos possa ser feita apenas pela adição de células de um complexo ao outro.

Dois complexos A e B são **compatíveis** (fig. 6) se:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \cap b \neq \emptyset \Rightarrow (a = b).$$

Um complexo A é um **refinamento** de um complexo B quando toda célula de B pode ser obtida pela união de células de A .

O **esqueleto** de ordem j de um complexo K , denotado por $K.\text{esqueleto}(j)$, é o conjunto de todas as células de K com dimensão menor ou igual a j (fig. 4). É fácil verificar que $K.\text{esqueleto}(j)$ é um complexo válido e que dois complexos compatíveis possuem todos os esqueletos compatíveis.

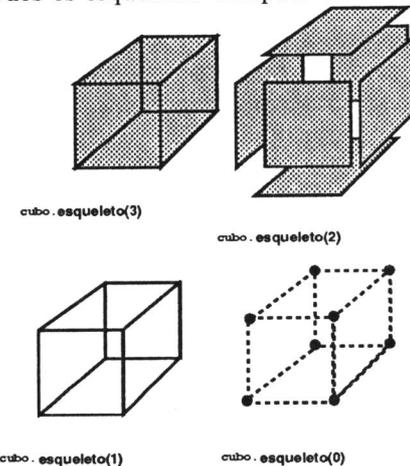


Figura 4 - Os esqueletos de um cubo.

Subdivisões do Espaço

As informações sobre adjacência mantidas nos complexos geométricos criados por Rossignac e O'Connor, embora bastem para determinar os relacionamentos de adjacência entre as células do complexo, são insuficientes para caracterizar de modo completo a topologia do complexo em relação ao espaço como um todo. Isto traz ambigüidades indesejáveis no contexto de modelagem. Considere-se, por exemplo, a figura 5. Os complexos geométricos associados aos conjuntos a e b possuem exatamente as mesmas informações de adjacência, já que os relacionamentos de adjacência entre v , e_1 , e_2 e e_4 são os mesmos nos dois casos. Isto não ocorreria se as células correspondentes às regiões F_2 e F_3 , respectivamente interna e externa ao ciclo determinado por e_2 e e_4 , fossem adicionadas ao complexo. Se isto ocorresse, qualquer vizinhança de qualquer ponto estaria sempre contida

em uma união de células do complexo. Assim, o complexo geométrico conteria informações de adjacência suficientes para caracterizar de que modo o complexo está mergulhado no espaço bi-dimensional. A discussão acima sugere que os complexos geométricos a serem considerados para modelagem devem cobrir inteiramente o espaço.

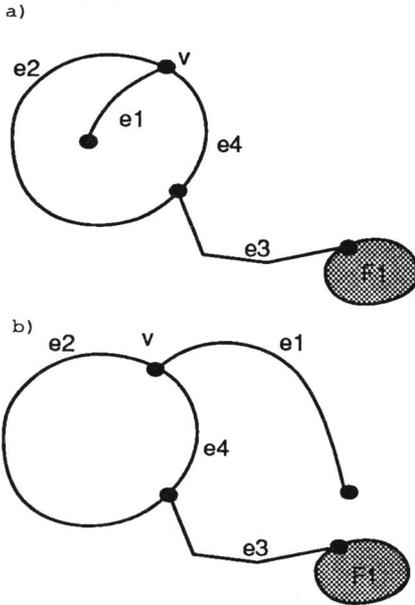


Figura 5 - Complexos ambíguos.

Na realidade, as estruturas de dados mencionadas anteriormente para representar subdivisões do espaço ou do plano consideram complexos dessa natureza. É conveniente introduzir o termo **complexo completo** para designar tais complexos.

Definição: Um complexo do \mathbb{R}^n é **completo** quando a união de todas as suas células é o próprio \mathbb{R}^n . Um complexo completo do \mathbb{R}^n tem, necessariamente, dimensão n .

Esta definição não é restritiva porque um complexo sempre pode ser completado.

Teorema: A um complexo geométrico do \mathbb{R}^n sempre pode ser adicionado um conjunto de células de dimensão máxima de forma que o complexo estendido seja completo.

Prova: Esta afirmação é verdadeira porque o complemento \bar{A} de um conjunto fechado A é vazio, ou é um conjunto aberto com a mesma fronteira de A . Logo, não sendo vazio, cada componente conexa de \bar{A} é um conjunto aberto, cuja fronteira pertence a A . Cada uma destas componentes é de dimensão máxima pois, sendo aberta, contém uma vizinhança de cada um de seus pontos. Assim, basta acrescentar cada uma destas componentes ao complexo para completá-lo.

Este teorema mostra que existe uma forte relação entre um complexo completo de dimensão n e o seu esqueleto de ordem $(n - 1)$, pois todo complexo completo de dimensão n fica inteiramente caracterizado pelo seu esqueleto de ordem $(n - 1)$. Em outras palavras, dado um complexo de dimensão n , existe um único conjunto de células de dimensão máxima capaz de completá-lo.

Este fato permite que se faça um paralelo entre as representações por fronteira para sólidos, tradicionalmente empregadas em Modelagem Sólida, e um complexo geométrico. As chamadas representações por fronteira para sólidos representam, justamente, os esqueletos de ordem 2 de alguns complexos de dimensão 3. Já a estrutura de dados *radial-edge* [WEIL86] permite representar complexos completos de dimensão 3, ou seja, a sua estrutura combinatoria corresponde a de um complexo completo. Como pode ser visto em [ROMA92a], uma maneira de criar um complexo completo é através de operadores que constroem o seu esqueleto. Os próprios operadores completam o complexo, automaticamente, à medida que se faz necessário.

Com relação à compatibilidade, verifica-se que dois complexos completos A e B são compatíveis se, e somente se, $A = B$. Esta afirmação é verdadeira porque, se os complexos são completos, a interseção de uma célula qualquer de A com B nunca é vazia. Logo, se A é compatível com B , para cada célula de A deve haver uma célula idêntica em B e vice-versa.

Isto sugere que para combinar dois complexos completos A e B , de dimensão n , basta refinar apenas os seus esqueletos de ordem $n - 1$, testando a interferência apenas das células de dimensão menor do que n de ambos. Em seguida, escolhe-se por exemplo A e adicionam-se as células do esqueleto de B que não coincidam, geometricamente, com as células de A . Considerando as duas definições abaixo, este processo pode ser descrito como um processo de encaixe de complexos.

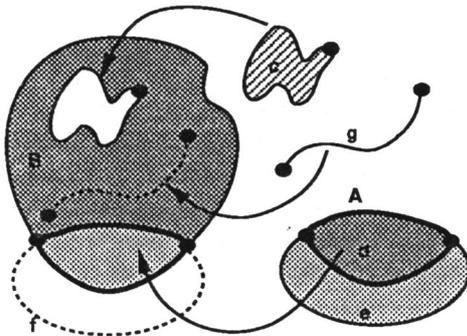
Definição: Um complexo A **encaixa** em um complexo B , ambos de dimensão n , se $A.esqueleto(n - 1)$ é compatível com $B.esqueleto(n - 1)$ (fig. 6).

Uma célula α de A , de dimensão menor que n , encaixa em B quando satisfaz às seguintes condições:

- $\forall c \in \text{bdry}(\alpha, A), c \in B$;
- $\forall c \in B.esqueleto(n - 1), (\alpha \subset c) \text{ ou } (\alpha \cap c = \emptyset)$.

Por fim, é conveniente definir mais um operador que fornece diretamente um tipo de relacionamento de adjacência que costuma ser mencionado no contexto de estruturas de dados topológicas. Seja c uma célula, de dimensão n , de um complexo K . O operador $\text{adj}(c, K)$ denota o conjunto de células c_i de dimensão n , onde $c_i \in \text{star}(c_j, K)$ para qual-

quer $c_j \in \text{bdry}(c, K)$. Costuma-se exigir que c_j tenha dimensão $n - 1$. Para $n = 0$, $\text{adj}(c, K)$ denota o conjunto de células c_i de dimensão 0, onde $c_i \in \text{bdry}(c_j, K)$ para qualquer $c_j \in \text{star}(c, K)$, c_j de dimensão 1. As células de $\text{adj}(c, K)$ são ditas **adjacentes** a c (fig. 3).



As células c, d e g encaixam no complexo B .
 A célula e encaixa em B se a célula f pertencer a B .
 O complexo A é compatível com o complexo B .

Figura 6 - Compatibilidade e encaixe de células.

Para colocar as subdivisões planares e espaciais estudadas em [ROMA91, ROMA92b], dentro do contexto de complexos geométricos, pode-se adotar a seguinte definição:

Definição: Uma SE^n é um complexo geométrico, de dimensão n , completo e que possui apenas uma célula ilimitada (esta célula tem dimensão n). Uma SE^2 é chamada subdivisão planar ou **SP**. Uma SE^3 é chamada subdivisão espacial ou **SE**.

As células de uma **SP** são conjuntos relativamente abertos e conexos: podem ser células de dimensão 2 ou faces, cujas fronteiras são formadas por um ou mais ciclos (conjuntos ordenados de arestas ou vértices); de dimensão 1 ou arestas (segmentos de curvas uni-dimensionais), cujas fronteiras são constituídas por um ou dois vértices; e de dimensão 0 ou vértices (simplesmente pontos do \mathbb{R}^2).

As células de uma **SE** são conjuntos relativamente abertos e conexos: podem ser células de dimensão 3 ou regiões, cujas fronteiras são formadas por uma ou mais cascas (conjuntos de faces e/ou arestas ou vértices); de dimensão 2 ou faces (retalhos de superfícies bi-dimensionais), cujas fronteiras são formadas por um ou mais ciclos (conjuntos ordenados de arestas ou vértices); de dimensão 1 ou arestas (segmentos de curvas uni-dimensionais), cujas fronteiras são constituídas por um ou dois vértices; e de dimensão 0 ou vértices (simplesmente pontos do \mathbb{R}^3).

Complexos Seletivos e Objetos Compostos por Diversos Materiais

Como já foi mencionado anteriormente, a proposta de representação através de decomposição do espaço consiste em uma etapa de subdivisão seguida de uma etapa de seleção. Os complexos geométricos completos abordados nas seções anteriores determinam decomposições apropriadas. Nesta seção, são discutidos mecanismos de seleção adequados para modelagem.

O ponto de partida é, mais uma vez, a proposta de Rossignac & O'Connor [ROSS90], que consiste em associar a cada célula um atributo que indica se a célula está ativa, isto é, se o conjunto de pontos definido pela célula deve ser incluído no conjunto de pontos associado ao objeto a ser representado. Um **complexo geométrico seletivo** (ou **SGC**) Λ é composto por um complexo, denotado por Λ .complexo, e por um conjunto de atributos associados a cada célula (ou grupo de células). Em particular, existe um atributo, chamado **status**, que especifica se a célula está ativa. Conseqüentemente, o conjunto de pontos associado a um SGC Λ , denotado por Λ .pontos, é definido como a união de todos os conjuntos de pontos das células c de Λ .complexo, tais que c .status=active. O atributo **status** permite que um SGC represente um conjunto de pontos que não é necessariamente fechado.

O mecanismo de seleção descrito acima pode ser facilmente estendido para permitir a representação de objetos compostos por diversos materiais. Tais objetos podem ser modelados através de uma função de distribuição de material $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ que a cada ponto do espaço associa um tipo de material. O símbolo \mathbb{N} designa a família de materiais considerada, que sempre contém um material especial, designado por **vazio**, que é o material associado aos pontos do espaço que não pertencem ao conjunto de pontos associado ao objeto. Para certas aplicações, convém também definir o material **neutro**, usado para caracterizar as interfaces entre objetos, possivelmente de materiais distintos (por exemplo: a face comum a dois cubos sobrepostos, um de madeira e outro de ferro).

Os objetos associados a um complexo geométrico são aqueles em que a função M descrita acima é constante sobre cada célula. São caracterizados, portanto, por um atributo que define para cada célula o material que a constitui. Desta forma, o atributo **status** em um SGC pode ser modificado de modo a designar o material associado a cada célula (a célula estará ativa, quando o material a ela associado for diferente de **vazio**).

É importante notar que o SGC associado a um

determinado objeto não é único, já que suas células podem ser subdivididas de modo a produzir um complexo mais refinado. O interesse maior, no entanto, é obter, se possível, uma descrição menos fragmentada de um dado objeto. Com esta finalidade, a operação de simplificação de um SGC é introduzida em [ROSS90]. Tal operação deve ser ligeiramente adaptada quando o objetivo é modelar objetos composto de diversos materiais.

Dado um SGC Λ , entende-se por **simplificação** o processo de encontrar um outro SGC Λ' que represente o mesmo conjunto de pontos, mas que tenha o menor número de células possível. O objetivo da simplificação é reduzir o espaço necessário para armazenar um complexo.

Uma operação de simplificação só pode ser executada se preservar a validade geométrica do complexo e o conjunto de pontos representado. As operações de simplificação que alterem o conjunto de pontos do SGC não devem ser permitidas. Basicamente, existem três operações de simplificação (fig. 7):

- **eliminação** - remove uma célula b inativa; obrigatoriamente, $\text{star}(b, K) = \emptyset$.
- **colagem** - remove uma célula ativa b de dimensão k , na fronteira externa (comum) de duas outras células ativas a, c de dimensão $k + 1$, contidas no mesmo suporte, criando uma única célula; obrigatoriamente, $\text{star}(b, K) = \{a, c\}$.
- **incorporação** - remove uma célula ativa b que está na fronteira interior de uma única célula ativa c ; obrigatoriamente, $\text{star}(b, K) = \{c\}$.

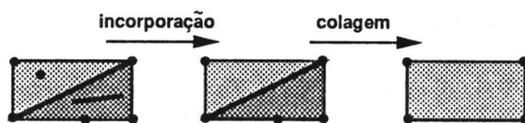


Figura 7 - Simplificação.

Na representação de objetos compostos por diversos materiais, a simplificação não pode ser tratada como uma operação baseada apenas em critérios topológicos e geométricos. O atributo **tipo de material** também determina a validade ou não de uma simplificação. Por exemplo, uma aresta entre duas faces de materiais distintos não pode ser retirada, mesmo que ambas as faces possuam o mesmo suporte.

Para complexos completos, a operação de eliminação não faz sentido, pois o star de uma célula nunca é vazio. Além disso, como não apenas o conjunto de pontos deve ser preservado, mas também a função de distribuição de material, as operações de colagem e incorporação só podem ser executadas quando todas as células envolvidas forem do mesmo

material.

A operação de simplificação preserva a função de distribuição de material associada a um objeto. Na realidade, as condições exigidas para a realização da operação estão ligadas exatamente à conservação desta função. Há, no entanto, situações em que é desejável alterar a função de distribuição de material de um complexo geométrico. No contexto de Modelagem Sólida, por exemplo, é comum exigir-se que os sólidos a serem modelados sejam regularizados. Isto é, eles devem ser conjuntos fechados, limitados e devem coincidir com o fecho topológico de seu interior. Isto evita que os sólidos considerados possuam faces ou arestas pendentes. No entanto, faces pendentes podem surgir como resultado de operações *booleanas*. É necessário, então, aplicar-se uma operação de regularização para eliminar os apêndices indesejáveis.

Uma operação semelhante pode ser estabelecida para um SGC. Para tal, basta que a operação de incorporação seja aplicada, mesmo quando o atributo de material da célula a ser incorporada for diferente do atributo de material da célula que a circunda (as condições de adjacência continuam as mesmas de antes, isto é, deve-se ter $b.\text{neighborhood}(c) = \text{cheio}$ e $(b \subset I(F(c)))$). Com esta operação, células utilizadas na fronteira de uma única célula passam a ter o mesmo material da célula que a envolve. Deve-se notar que as condições de adjacência exigidas para a incorporação impedem que uma célula interior seja eliminada se ela for utilizada por outra célula.

Um algoritmo para regularizar um objeto é obtido aplicando-se a função de incorporação, descrita acima, de uma maneira *top-down* (incorporando as células em ordem decrescente de dimensão), até que não seja possível incorporar mais nenhuma célula.

Conclusões

Embora as estruturas de dados *non-manifold* sejam capazes de representar agregados de objetos, só recentemente, um tratamento conceitual mais cuidadoso foi desenvolvido. O SGC de Rossignac & O'Connor [ROSS90] fornece um modelo matemático adequado para a representação de subdivisões do espaço. Neste trabalho mostrou-se quais os tipos de relacionamentos de adjacência que podem ser representados ordenadamente em um complexo geométrico (e as vantagens de se tirar proveito desta ordenação) e que um **complexo geométrico é um complexo celular**, cujas células foram grupadas de forma a evitar a fragmentação desnecessária do modelo. Este resultado é importante porque mostra que o domínio de modelagem permaneceu o mesmo, tendo sido criada apenas uma decomposição mais econômica.

Com a criação do conceito de **complexo completo** foi possível obter uma caracterização precisa do tipo de objeto que pode ser representado por certas estruturas de dados topológicas que têm sido utilizadas, com sucesso, em vários sistemas de modelagem atuais.

Em [ROMA92b] foi sugerido um processo de modelagem muito simples para construção de uma SE, no qual os retalhos de superfície eram adicionados um a um. Claramente, este processo não é adequado às aplicações interativas. Os autores trabalham, no momento, no desenvolvimento de operadores de modelagem baseados em operações CNRG [ROSS91], generalizando as chamadas operações *booleanas*. Neste novo trabalho, procura-se desenvolver uma álgebra para especificação de operações que são capazes de tratar agregados de objetos representados por SGCs. Desta forma, é possível manter-se uma representação explícita do bordo dos objetos e, ao mesmo tempo, utilizar operações que agem sobre o conjunto de pontos que definem cada objeto.

Referências

- [CARV92] Carvalho, P. & Gomes, J. & Velho, L. - *Space Decompositions: Theory and Practice*. Preprint, IMPA, 1992.
- [GREE67] Greenberg, Marvin - *Lectures on Algebraic Topology*. W.A.Benjamin Inc., N.Y., 1967.
- [HENL79] Henle, M. - *A Combinatorial Introduction to Topology*. W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1979.
- [LOJA64] Lojasiewicz, S. - *Triangulation of Semi-Analytic Sets*. Annali della Scuola Normale Superiore di Piza, Vol 18, 1964, pp 450-474.
- [MANT88] Mäntyllä, M. - *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, Rockville, Maryland, 1988.
- [ROMA91] Roma, P. Cavalcanti & Carvalho P.C. & Martha, L.F. - *Criação e Manutenção de Subdivisões Planares*, Anais do SIBGRAPI IV, 1991, pp 13-24.
- [ROMA92a] Roma, P. Cavalcanti - *Criação e Manutenção de Subdivisões do Espaço*, Tese de Doutorado, PUC-Rio, Dep. Informática, 1992.
- [ROMA92b] Roma, P. Cavalcanti & Carvalho, P.C. & Martha, L.F. - *Criação e Manutenção de Subdivisões Espaciais*, Anais do SIBGRAPI V, 1992, pp 105-113.
- [ROSS90] Rossignac, Jarek R. & O'Connor, Michael A. - *SGC: A Dimension-independent Model for Pointsets with Internal Structures and Incomplete Boundaries*. Geometric Modeling for Product Engineering, North Holland 1990, pp 145-180.
- [ROSS91] Rossignac, Jarek R. & Requicha, A.G. - *Constructive Non-regularized Geometry*. Computer Aided Design, Vol.23, No.1, 1991, pp 21-32.
- [WEIL86] Weiler, K. - *Topological Structures for Geometric Modeling*. Ph.D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y. Aug 1986.