

ARTIGO TÉCNICO

ÁREA: PROCESSAMENTO DE IMAGENS: SENSORIAMENTO REMOTO

RESTAURAÇÃO DE RADIOIMAGENS SOLARES: AVALIAÇÃO DO MAU
CONDICIONAMENTO E SOLUÇÃO POR TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃONelson D. A. Mascarenhas
Edson A. Ribeiro
Joaquim E.R. CostaMinistério da Ciência e Tecnologia-MCT
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515 - 12201 - São José dos Campos - SP - BrasilSUMÁRIO

O problema de deconvolução de uma radioimagem degradada pelo diagrama de radiação da antena pode ser colocado em termos de um problema de restauração de imagens. Adotando-se um modelo computacional de regressão estatística, estuda-se o problema de mau condicionamento do estimador de mínimos quadrados em função do coeficiente de espalhamento da função gaussiana que aproxima o diagrama de radiação. A solução do problema de mau condicionamento é proposta em termos do uso de métodos de regularização. Apresentam-se resultados com imagens simuladas e imagens reais obtidas pelo Observatório Radioastronômico de Itapetinga do INPE.

1 - INTRODUÇÃO

Ao se apontar uma antena radioastronômica para uma posição especificada (x,y) em uma radiofonte extensa em comparação ao feixe da antena, como é o caso do sol, obtém-se uma tensão que corresponde a uma certa temperatura equivalente de ruído da antena $T_A(x,y)$. Esta função é obtida a partir da convolução da distribuição espacial original da radioemissão caracterizada pela função temperatura de brilho $T_B(\alpha,\beta)$ com o diagrama de radiação da antena $P(x,y)$ [1] e pela adição de um termo de ruído $r(x,y)$, no receptor do radiotelescópio, ou seja:

$$T_A(x,y) = \frac{A}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-\alpha, y-\beta) T_B(\alpha,\beta) d\alpha d\beta + r(x,y) \quad (1)$$

onde λ é o comprimento de onda considerado e A é a eficiência de abertura da antena. As definições básicas de T_A , T_B , P e A podem ser encontradas em [2] e [3].

Como decorrência da convolução espacial da distribuição original da radioemissão da fonte com o diagrama de radiação da antena, a radioimagem obtida apresenta-se degradada ou "alisada".

O problema abordado neste artigo consiste na aplicação de técnicas de restauração de imagens para a recuperação da função T_B , a partir do conhecimento de T_A , da função de espalhamento P e da estatística do ruído r .

2 - O MODELO UTILIZADO

As radioimagens obtidas pelo INPE no Observatório Radioastronômico de Itapetinga são adquiridas numa grade discreta de pontos. Torna-se conve

niente, portanto, utilizar um modelo algébrico do processo de degradação, do tipo:

$$\underline{t}_A = \underline{P} \underline{t}_B + \underline{r} \quad (2)$$

onde os vetores \underline{t}_A , \underline{t}_B e \underline{r} representam respectivamente a imagem degradada, a imagem original e o ruído, através uma notação lexicográfica [4]. A matriz \underline{P} representa uma discretização da função de espalhamento $P(x,y)$.

Foi adotado o modelo sobredeterminado [5] e, por simplificação, admitiu-se, como é comum na prática radioastronômica, que o diagrama de radiação da antena, que determina a função $P(x,y)$, passa ser aproximado por uma função gaussiana separável, da forma:

$$P(x,y) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\delta_x^2} + \frac{y^2}{\delta_y^2} \right) \right\} \quad (3)$$

Nessas condições, admitindo-se que o ruído é branco, obtém-se o melhor estimador linear não polarizado de \underline{t}_B , pelo teorema de Gauss-Markov [6], que é equivalente à solução de mínimos quadrados:

$$\hat{\underline{t}}_B = (\underline{P}^T \underline{P})^{-1} \underline{P}^T \underline{t}_A = \underline{P}^+ \underline{t}_A \quad (4)$$

onde \underline{P}^+ é a matriz pseudo-inversa de \underline{P} . A hipótese de separabilidade da função de espalhamento permite obter \underline{P}^+ através do produto de Kronecker (ou produto direto) [4] das pseudo-inversas das matrizes que descrevem o espalhamento nas linhas e colunas da imagem, isto é:

$$\underline{P}^+ = \underline{P}_C^+ \otimes \underline{P}_L^+ \quad (5)$$

3 - O PROBLEMA DO MAU CONDICIONAMENTO

É bem conhecido o fato de que problemas de deconvolução são mau condicionados no sentido, de que, na ausência de qualquer conhecimento a priori sobre o vetor \underline{t}_B , pequenas perturbações dadas pelo ruído \underline{r} podem ocasionar grandes perturbações no vetor de estimadores $\hat{\underline{t}}_B$. A análise dessas perturbações pode ser feita através da noção de número de condição [7]:

$$\frac{\|\Delta \underline{t}_B\|}{\|\underline{t}_B\|} < \|\underline{P}^+\| \cdot \|\underline{P}\| \cdot \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{t}_A\|} \quad (6)$$

onde $\Delta \underline{t}_B = \hat{\underline{t}}_B - \underline{t}_B$.

A expressão $\|\underline{P}^+\| \cdot \|\underline{P}\|$, que determina a variação relativa na solução de mínimos quadrados com respeito à perturbação relativa no setor de observação é denominada número de condição (NCD) da matriz \underline{P} .

Tal expressão foi calculada como função do coeficiente de espalhamento $\delta_x = \delta_y$ da função gaussiana que descreve o diagrama de radiação da antena, para um número fixo ($N = 21$) de pontos (supostos iguais a N na horizontal e na vertical) da imagem original \underline{t}_B e para um número variável ($M = 23, 25, 27$) de pontos (supostos iguais a M na horizontal e na vertical) na imagem observada, considerando-se diferentes truncamentos ($L = 3, 5, 7$ respectivamente) da função de espalhamento, conforme mostra a Figura 1.

Observa-se que as curvas apresentam um máximo, que é atingido quando o efeito de truncamento da função de espalhamento começa a ser sensível. Se não houvesse truncamento, as curvas tenderiam para infinito rapidamente, o valor assintótico sendo obtido para a função de espalhamento mais suave possível, com valor constante, implicando uma matriz \underline{P} de posto unitário. Com o truncamento, as curvas exibem um ramo descendente que começa no ponto onde a função de espalhamento começa a ser truncada substancialmente. Agora, para coeficientes de espalhamento crescentes as curvas tendem a um valor finito.

Estas curvas podem ser usadas como um guia para a escolha de M , uma vez fixado N . Para um pequeno coeficiente de espalhamento, todas as curvas coincidem e o projetista pode escolher $M = N$ com pequeno erro. O espalhamento neste caso não tem quase efeito e apenas o ruído vai afetar a restauração. Com um coeficiente de espalhamento crescente, diferentes valores de M implicarão em diferentes valores do número de condição. Se uma curva no ramo ascendente é escolhida, o truncamento não será observado, mas um alto número de condição imporá altas variâncias nos estimadores. Se uma curva no ramo descendente é selecionada, variâncias mais baixas dos estimadores dos componentes de \underline{t}_B serão obtidas, ao preço de um erro na estimação da função contínua T_B devido ao erro de truncamento no modelo discreto. Portanto, uma troca de variâncias dos estimadores pelo erro de truncamento do modelo discreto pode ser caracterizada. Este dilema inevitável só pode ser eliminado com o uso de conhecimento a priori correto sobre a solução.

4 - O USO DE TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO

Basicamente, o problema de deconvolução é um problema mal condicionado, no sentido de que pequenas perturbações na imagem degradada (provocadas pelo ruído) podem levar a grandes variações na imagem original. As técnicas de suavização ou regularização [8], [9], [10] têm sido utilizadas para superar o problema de mau condicionamento associado à restauração de imagens. Essencialmente, tais métodos procuram evitar as grandes oscilações na restauração minimizando uma expressão quadrática do tipo $\|\underline{C}\underline{t}_B\|^2$ sujeita a uma restrição de igualdade na norma do vetor residual, dado por $\|\underline{t}_A - \underline{P}\underline{t}_B\|^2 = e^2$.

Utilizando o método do Multiplicador de Lagrange, obtém-se uma solução na forma:

$$\underline{\hat{t}}_B = (\underline{P}^T \underline{P} + \gamma \underline{C}^T \underline{C})^{-1} \underline{P}^T \underline{t}_A \quad (7)$$

Uma possível escolha de \underline{C} pode refletir a minimização das diferenças finitas de 2ª ordem da imagem restaurada e neste caso \underline{C} é dada por [11]:

$$\underline{C} = \underline{C}_1 \otimes \underline{C}_1 \quad (8)$$

onde:

$$\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

e onde \otimes denota o produto de Kronecker [4].

O valor de γ deve normalmente refletir um conhecimento a priori do nível de ruído da imagem degradada. O processo iterativo é completado quando o quadrado da norma de vetor residual seja igual ao valor especificado [12].

5 - RESTAURAÇÃO DE RADIOIMAGENS SOLARES

5.1 - RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

A Figura 2 mostra uma imagem simulada do sol que a seguir foi degradada pela função gaussiana separável dada pela Expressão (3), com truncamento de 3 pontos, obtendo-se uma imagem de 19×21 "pixels" (Figura 3). O coeficiente de espalhamento utilizado baseou-se na determinação experimental do diagrama de radiação da antena ($\delta_x = \delta_y = 1,78$) e a variancia do ruído aditivo foi fixada em 25,0, independente do nível de sinal.

A Figura 4 evidencia o problema de mau condicionamento da solução de mínimos quadrados ($\gamma=0$), pela presença de grandes oscilações na solução. A Figura 5 mostra uma solução bastante suavizada, utilizando-se um valor de 10^3 para o coeficiente γ . A Figura 6 representa a solução obtida utilizando-se o coeficiente γ ($\gamma = 1,2 \times 10^{-3}$) que resultou numa igualdade aproximada entre a norma ao quadrado do vetor residual e a soma das variâncias do ruído nos "pixels", através do método de regularização.

5.2 - RESULTADOS COM IMAGEM REAL

A radioimagem original borrada e ruidosa t_A é mostrada na Figura 7. Quando o fator γ cresce do valor nulo até ∞ , obtém-se inicialmente, para $\gamma=0$, a solução de mínimos quadrados que exhibe grandes oscilações (Figura 8). Para γ muito alto a solução se aproxima de uma imagem com todas as componentes nulas. Trata-se essencialmente de uma troca entre variância e polarização. A polarização é nula para a solução de mínimos quadrados mas a variância é alta devido ao mau condicionamento. Quando $\gamma \rightarrow \infty$ a polarização é desconhecida, sendo igual à imagem original e a variância é nula. A Figura 9 ilustra o caso de uma solução bastante suavizada, para o valor de $\gamma = 10^3$.

A solução de compromisso obtida pelo algoritmo de regularização está ilustrada na Figura 10, para o valor de $\gamma = 0,3$. Deve-se notar que não foi utilizado aqui o critério de igualdade do quadrado da norma do vetor residual à soma das variâncias do ruído nos "pixels". A escolha de parâmetro γ foi empírica, baseada nos resultados anteriores de simulação. O fato de o critério analítico não ter sido o mais adequado para a escolha de γ deve-se possivelmente às restrições que o modelo simplificado de ruído aditivo e independente de sinal possui para representar o problema real.

É de se esperar que resultados mais conclusivos poderão eventualmente ser obtidos pela comparação das restaurações da radioimagem com imagens óticas do sol tiradas na mesma data.

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRACEWELL, R.N. "Two-Dimensional Aerial Smoothing in Radio Astronomy", Australian Journal of Physics, 9: 297-314, Jan, 1956.
- [2] KRAUS, J.D. *Radio-Astronomy*, Mc GrawHill, New York, NY, 1966.
- [3] MARTON, L. *Methods of Experimental Physics*, Academic Press, London, 1976.

- [4] PRATT, W.K. *Digital Image Processing*, Wiley, New York, 1978.
- [5] MASCARENHAS, N.D.A.; PRATT, W.K. "Digital Image Restoration Under a Regression Model", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-22:252-266, March 1975.
- [6] LEWIS, T.P.; ODELL, P.L. *Estimation in Linear Models*, Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [7] RUST, B.W.; BURRUS, W.R. *Mathematical Programming and the Numerical Solution of Linear Equations*, American Elsevier, New York, 1972.
- [8] PHILIPS, D.L. "A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind", *J. Assoc. Comput. Mach.* 9: 84-97, 1964.
- [9] TWOMEY, S. "On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature", *J. Assoc. Comput. Mach.* 10:97-101, 1963.
- [10] TICHONOV, A.N. "Regularization of Incorrectly Posed Problems", *Soviet Math. Dokl.*, 4:1624-1627, 1963.
- [11] ANDREWS, H.C.; HUNT, B.R. *Digital Image Restoration*, Prentice Hall, New Jersey, 1977.
- [12] HUNT, B.R. "The Application of Constrained Least Squares Estimation to Image Restoration by Digital Computer", *IEEE Trans. on Computers*, C-22: 805-812, September, 1973.

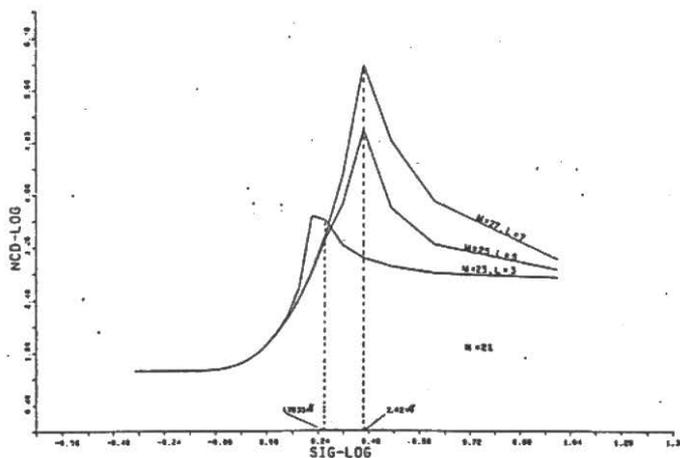


Fig. 1 - Curvas do Número de Condição como Função do Coeficiente de Espalhamento da Gaussiana.

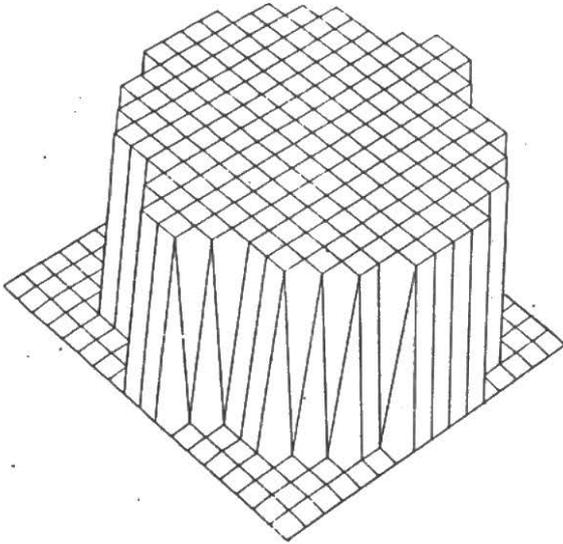


Fig. 2 - Imagem Simulada do Sol
(original).

Fig. 3 - Imagem Borrada e
Ruidosa do Sol
(simulação).

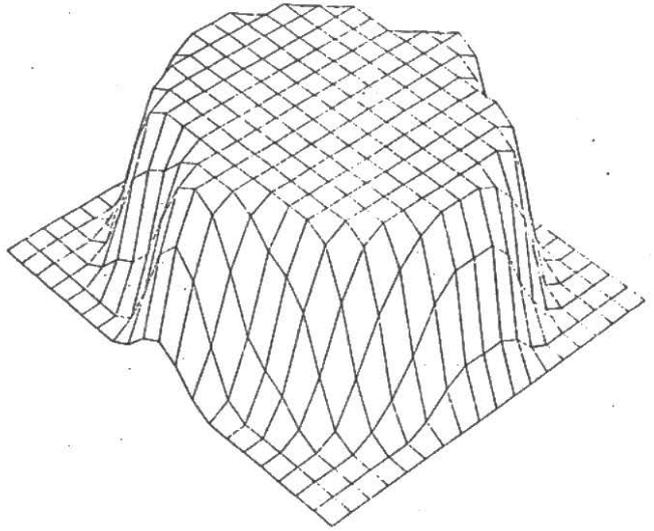
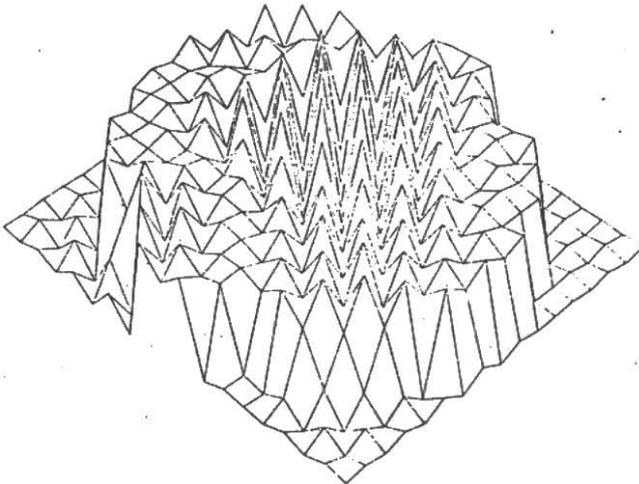


Fig. 4 - Restauração da Imagem
Simulada por Mínimos
Quadrados ($y = 0$).



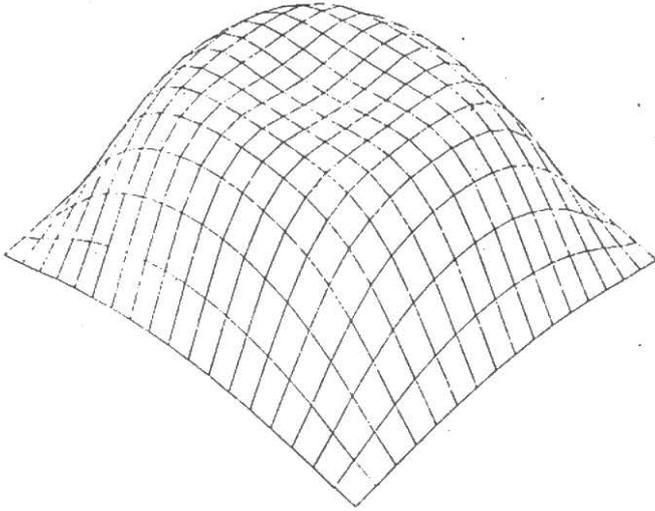


Fig. 5 - Restauração da Imagem Simulada por Regularização ($\gamma=10^3$).

Fig. 6 - Restauração da Imagem Simulada por Regularização ($\gamma=1,2 \times 10^{-3}$).

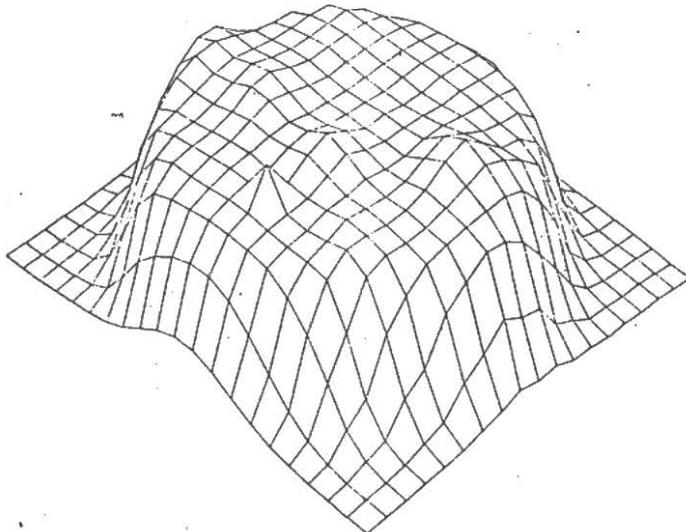
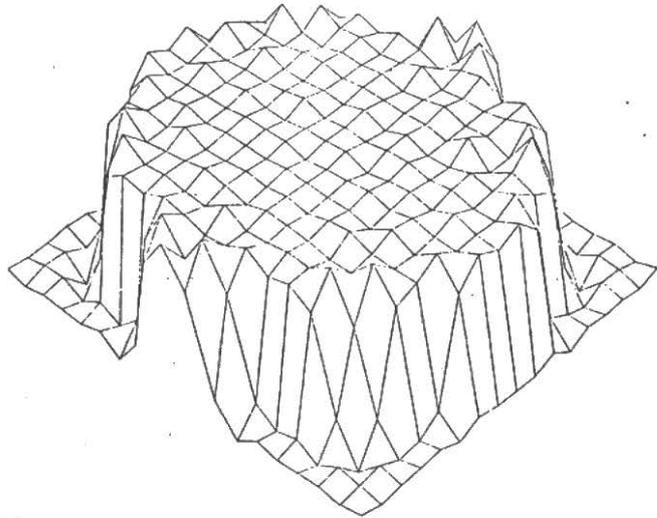


Fig. 7 - Radioimagem Original Borrada e Ruída de Sol.

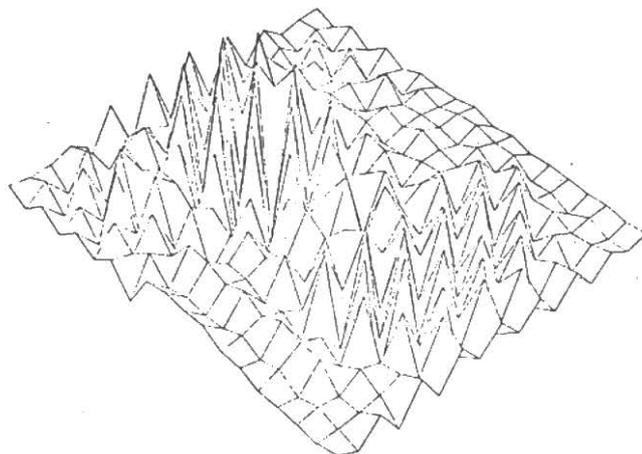


Fig. 9 - Restauração da Imagem Original por Regularização ($\gamma=10^3$).

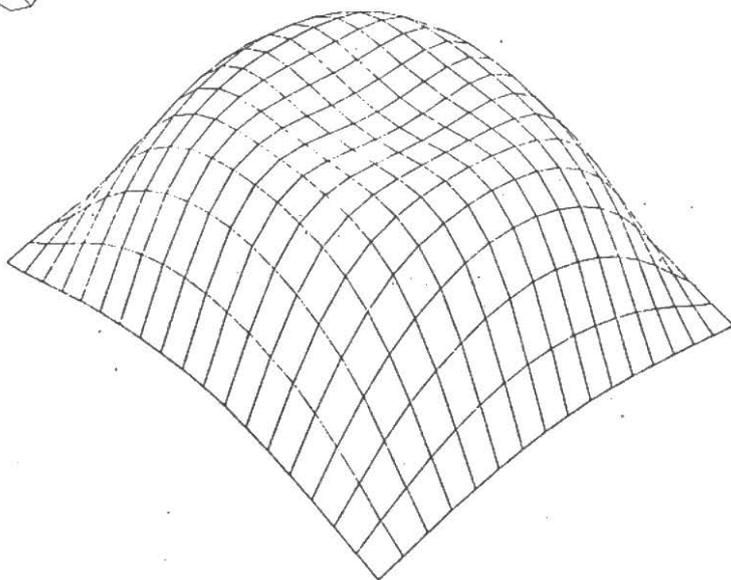


Fig. 10 - Restauração da Imagem Original por Regularização ($\gamma=0,3$).

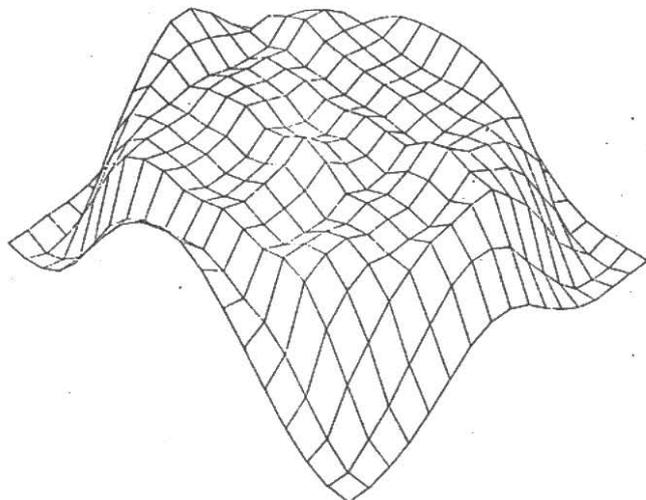


Fig. 8 - Restauração da Imagem Original por Mínimos Quadrados ($\gamma=0$).